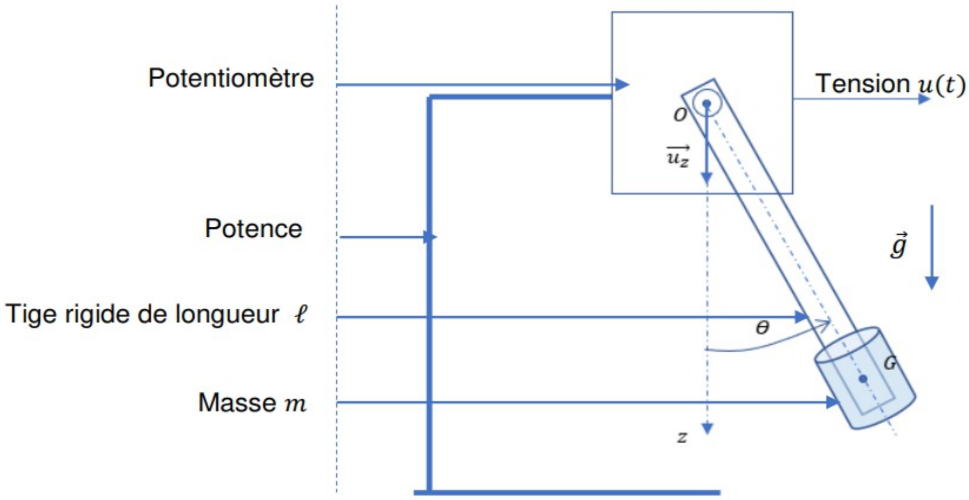
Préparation DS 6 sciences physiques (2)

PROBLEME 1 : Étude des oscillations harmoniques et anharmoniques d'un pendule *(barème sur 40 points)*

Modélisation

On considère le dispositif dessiné ci-dessous permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse fixée à son extrémité. A l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse va osciller autour du point *O*. La position angulaire *θ(t)* de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant . Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire *θ(t)* de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec *k* une constante.



Dans toute la suite la suite, nous allons travailler avec les hypothèses suivantes :

- Le mouvement du pendule est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- Les frottements de type fluide seront négligés.
- On néglige également les effets dissipatifs des actions de contact entre le potentiomètre et la tige.
- On note $\vec{g} = g\vec{u}_z$ le champ de pesanteur terrestre et on néglige la poussée d'Archimède de l'air environnant.
- On néglige la masse de la tige par rapport à la masse *m* dont le centre de masse G est tel que OG ≈ ℓ.

Ce système oscillant est alors modélisé par un pendule simple dont l'étude se limite à celle de la masse

animée d'une vitesse algébrique $v = \ell \dfrac{d\theta}{dt} = \ell\dot{\theta}$.

1) Etablir l'expression de l'énergie cinétique de ce pendule en fonction de , m, ℓ et $\dot{\theta}$.

2) Etablir l'expression de l'énergie potentielle Ep associée à ce pendule en fonction de m, g, ℓ et *θ*, en prenant Ep(*θ=0°)=0.*

3) Enoncer le théorème de la puissance mécanique. On nommera les termes intervenant dans ce théorème.

4) Montrer alors que l'angle *θ(t)* vérifie l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. On donnera l'expression de la pulsation propre en fonction de g et ℓ.

5) Pour cette question uniquement, on se place dans l'approximation harmonique qui impose une faible amplitude angulaire des oscillations (amplitude inférieure à 30°). Dans ces conditions, on accepte le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\sin\theta \approx \theta$.

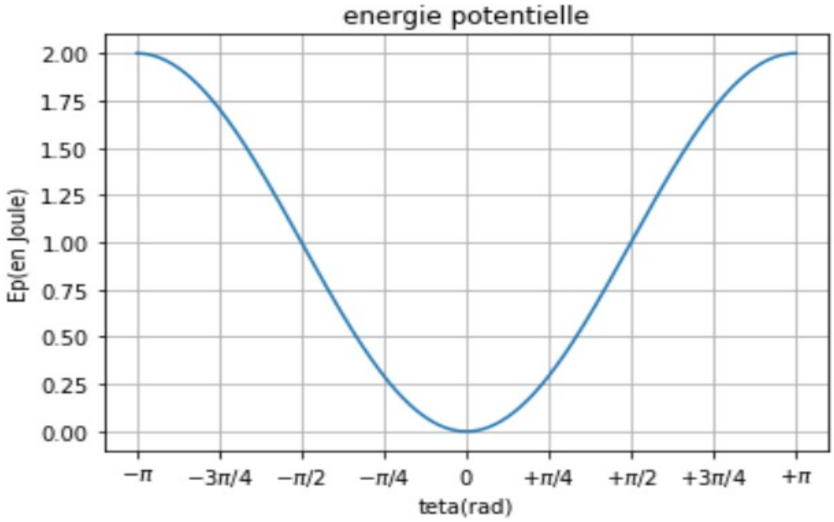
➔ Etablir l'expression de *θ(t)* en prenant comme conditions initiales : $\theta(t=0) = 0°$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$.

➔ Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations harmoniques.

➔ Représenter l'allure de *θ(t)* sur quelques périodes propres T_0.

Partie expérimentale

On donne ci-dessous la représentation graphique de $E_p(\theta)$ du pendule étudié avec $m = 0{,}2\ kg$.



A t = 0, on lance la masse avec une vitesse initiale $v(0)=v_0=\sqrt{10}\,m.s^{-1}$ à la position angulaire $\theta(t=0) = 0°$.

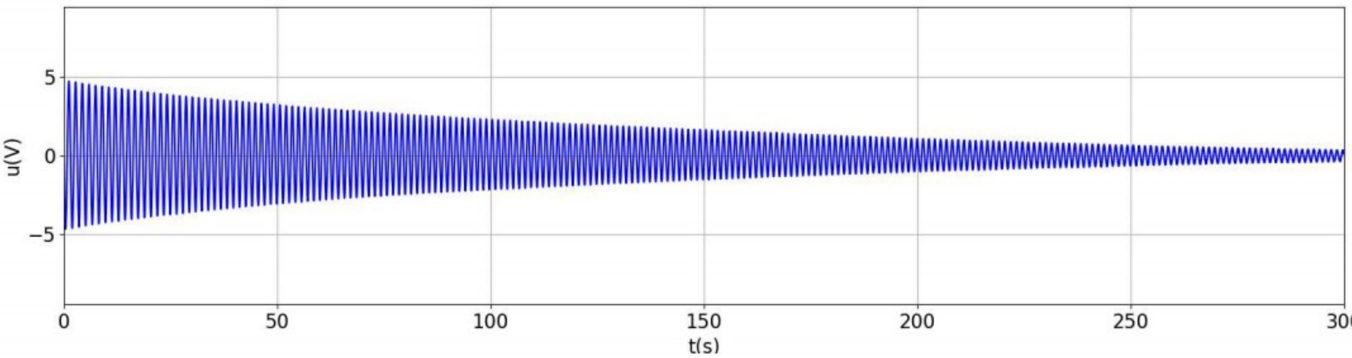
6) Quelle est la valeur de l'énergie mécanique E_m de la masse ? Justifier.

7) Quelle sera la position angulaire maximale θ_0 *(j'ai laissé la notation de l 'énoncé mal choisie, θ_{max} aurait été plus judicieux)* atteinte par cette masse ? Justifier.

Une fois lancé, le pendule oscille avec une amplitude ne respectant pas toujours l'approximation harmonique. L'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ est alors non linéaire et le pendule n'oscille plus de manière isochrone : sa fréquence d'oscillation dépend de son amplitude maximale d'oscillation θ_0. En dehors de l'approximation harmonique, on démontre que :

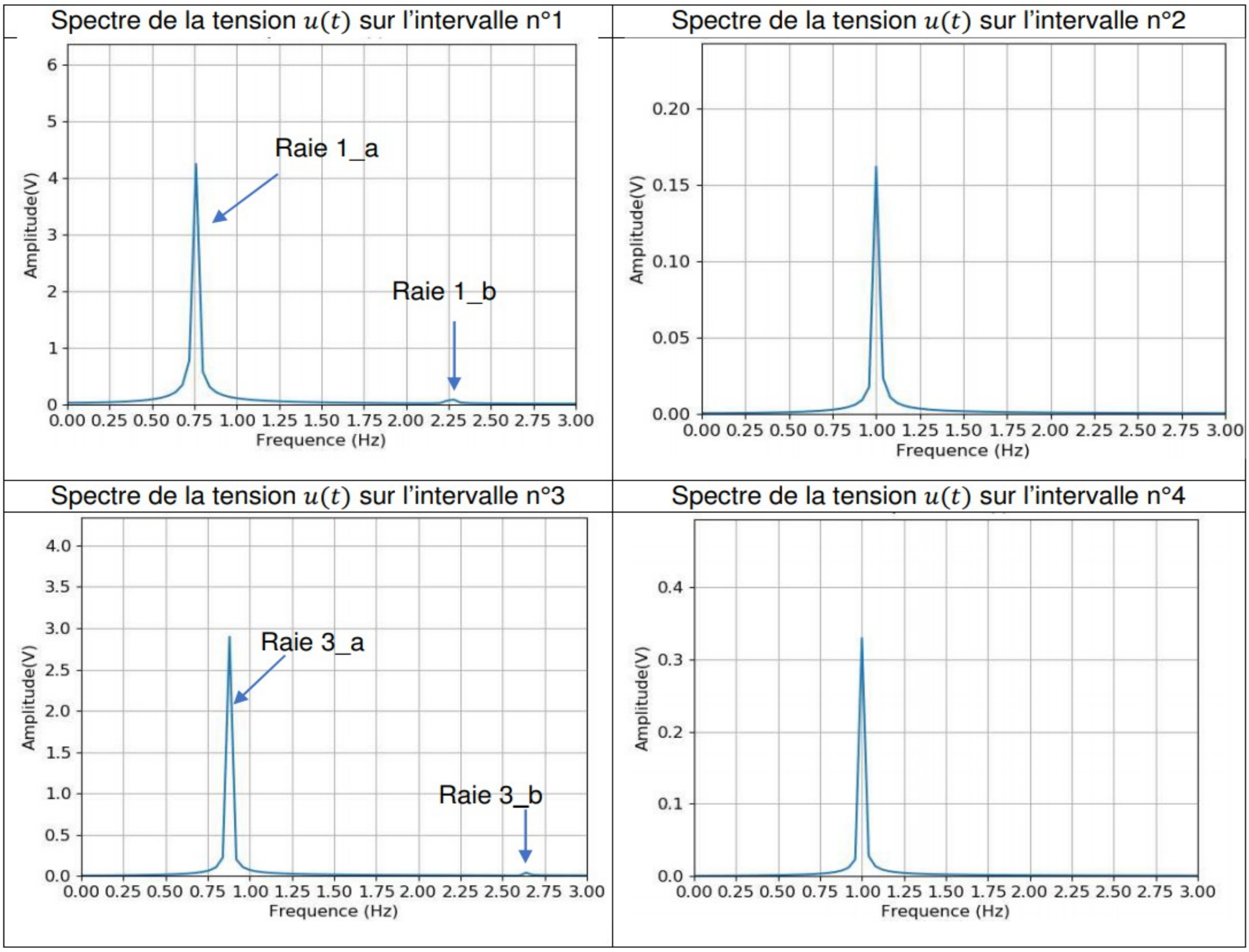
$$\theta(t)=\theta_0\left(\sin(\omega_0' t)+\frac{\theta_0^2}{192}\sin(3\omega_0' t)\right) \text{ avec } T_0'=\frac{2\pi}{\omega_0'}=T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

On donne ci-dessous le relevé expérimental de $u(t)$.



L'étude des oscillations pendant 300 s met logiquement en évidence l'influence des frottements. Cependant, en étudiant les oscillations sur des intervalles de temps plus courts de 25 s, on peut, en première approximation, encore négliger l'effet des frottements.

On donne ci-après les spectres obtenus pour quatre intervalles distincts de 25 s chacun, appelés intervalles n°1, n°2, n°3 et n°4 où l'amplitude des oscillations est différentes :



8) Quel instrument de mesure peut-on utiliser afin d'obtenir le spectre de la tension *u(t)*.

9) Sur quel(s) intervalle(s) l'isochronisme des oscillations harmoniques du pendule est-il observable ? Justifier.

10) Sur quel(s) intervalle(s) les effets non linéaires des oscillations du pendule sont-ils observables ? Justifier en repérant ces effets non linéaires.

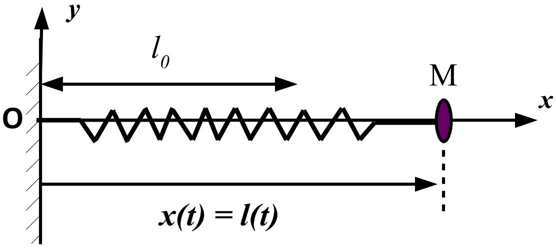
11) Donner la valeur de la fréquence propre f_0 du pendule.

12) Justifier la valeur de la fréquence associée à la raie 1b.

PROBLEME 2 : Oscillations d'une masse *(barème sur 60 points)*

Première partie

Une perle de masse $m = 200\,g$ considérée comme ponctuelle peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Cette perle est attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur $k = 12{,}0\ N.m^{-1}$ et le longueur à vide $l_0 = 30{,}0\,cm$ comme l'indique la figure ci-dessous. Le point d'attache du ressort noté O est fixe et sert d'origine à l'axe Ox.



A t=0, on tire le ressort d'une quantité $X_0 = 12\,cm$ **par rapport à sa position d'équilibre** et on lâche la perle sans vitesse initiale.

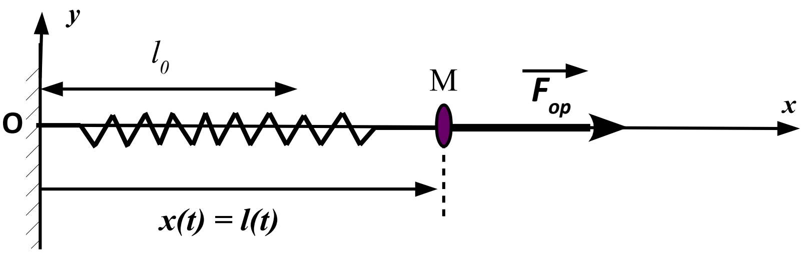
1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse $x(t)$ correspondant à la longueur du ressort . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation.

2. Représenter $x(t)$ sur 2 périodes. Préciser l'amplitude des oscillations et la valeur moyenne de $x(t)$.

3. Calculer l'énergie cinétique de la perle quand elle passe par sa position d'équilibre.

Deuxième partie

La perle est initialement au repos et on applique à partir d'un instant pris comme origine des temps une force $\overrightarrow{F_{op}} = F\,\vec{u}_x$ constante comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse $x(t)$ correspondant toujours à la longueur du ressort . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation et déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $x(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0$ B) $x(t) = \frac{F}{k}\sin(\omega_0 t) + l_0$

C) $x(t) = \frac{F}{m}(1 + \cos(\omega_0 t)) + l_0$ D) $x(t) = \frac{F}{k}(\cos(\omega_0 t) - 1) + l_0$

5. L'énergie mécanique de la perle au cours de son mouvement est définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique. Etablir l'expression de l'énergie mécanique de la perle. Quelle est la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $E_m = \frac{1}{2} k l_0^2$ B) $E_m = \frac{F^2}{k}(1 - \cos(\omega_0 t))$ C) $E_m = \frac{F^2}{m}\frac{t^2}{2}$ D) $E_m = \frac{kF}{2k}\cos^2(\omega_0 t)$

6. A $t = \tau$, on cesse d'appliquer la force $\overrightarrow{F_{op}}$. Déterminer l'amplitude X_m des oscillations ultérieures en fonction de τ puis déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $X_m = \frac{F}{k}\left|\sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)\right|$ B) $X_m = l_0 + \frac{F}{k}\cos\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)$ C) $X_m = \frac{2F}{k}|\sin(\omega_0 \tau)|$ D) $X_m = \frac{F}{k}\cos(\omega_0 \tau)$

7. Calculer la valeur numérique minimale de τ qui assure des oscillations d'amplitude maximale. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $\tau = 0{,}4\,s$ B) $\tau = 15s$ C) $\tau = 0{,}08\,s$ D) $\tau = 2s$

8. Calculer alors le travail $W_{\overrightarrow{F_{op}}}$ fourni par la force $\overrightarrow{F_{op}}$ entre t=0 et $t = \tau$. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $W_{\overrightarrow{F_{op}}} = F\,l_0$ B) $W_{\overrightarrow{F_{op}}} = 2F\,l_0$ C) $W_{\overrightarrow{F_{op}}} = \frac{2F^2}{k}$ D) $W_{\overrightarrow{F_{op}}} = \frac{F^2}{k}$

9. Lors de l'expérience, on constate que l'amplitude des oscillations dans la deuxième phase du mouvement est divisée par 2 après 25 oscillations. En supposant que le frottement est de type fluide (force proportionnelle à la vitesse), évaluer le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

Solution problème 2: *(d'après ENAC 2012)*

1. *Ref d'étude:* ref terrestre, *repère d'espace associé:* $R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$

Système: perle de masse m, *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)*

Base de projection: $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, *Vecteurs cinématiques*: $\vec{OM}=x\vec{u}_x$ $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x=v\vec{u}_x$ $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x$ *(y=0)*

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_x=-k(x-l_0)\vec{u}_x$

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}$
- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x}=-kx+kl_0$ d'où $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2l_0}$ avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $\boxed{x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)+l_0}$.

Exploitation de la première condition initiale :

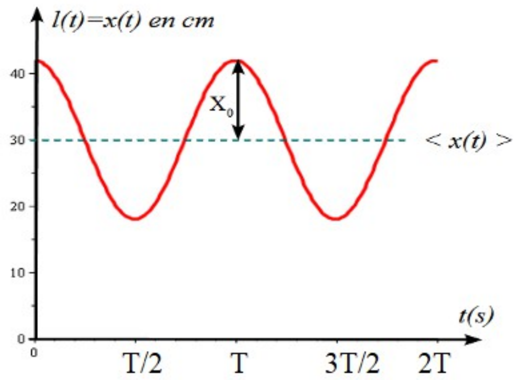
D'après la solution $x(0)=A+l_0$ or $x(0)=l_0+X_0$ donc $A=X_0$.

*Exploitation de la deuxième condition initiale :*On calcule la dérivée de x(t) pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0t)+B\omega_0\cos(\omega_0t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0)=B\omega_0$ or $\dot{x}(0)=0$ donc $B=0$. *d'où* $\boxed{x(t)=X_0\cos(\omega_0t)+l_0}$.

Applications numériques : $\omega_0=\sqrt{k/m}=\sqrt{12/0,2}=7,75\,rad.s^{-1}$ *donc* $\boxed{x(t)=12\cos(7,75t)+30\,cm}$.

2. *Représentation graphique sur 2 périodes:*



La période des oscillations est : $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0,81\,s$

L'amplitude des oscillations est $X_0=12\,cm$.

La valeur moyenne est $<x(t)>=30\,cm$

3. La bille n'est soumise qu'à des forces conservatives. Son énergie mécanique $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ est constante au cours du mouvement on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur constante au cours du mouvement. Quand la perle passe par la position d'équilibre toute son énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique donc $E_c=E_m(t=0)=\frac{1}{2}kX_0^2$.

Application numérique : $\boxed{E_c=\frac{1}{2}\times12\times0,12^2=86,4\,mJ}$.

4. *Ref d'étude:* ref terrestre, *repère d'espace associé:* $R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$

Système: perlede masse m, *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)*

Base de projection: $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, *Vecteurs cinématiques*: $\vec{OM}=x\vec{u}_x$ $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x=v\vec{u}_x$ $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x=a\vec{u}_x$ *(y=0)*

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_x=-k(x-l_0)\vec{u}_x$
- Force $\vec{F}_{op}=F\vec{u}_x$

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{F}_{op}$
- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x}=-kx+kl_0+F$ d'où $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^2 l_0+\frac{F}{m}}$ avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $\boxed{x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+l_0+\frac{F}{m\omega_0^2}}$.

Exploitation de la première condition initiale :

D'après la solution $x(0)=A+l_0+\frac{F}{m\omega_0^2}$ or $x(0)=l_0$ donc $A=-\frac{F}{m\omega_0^2}$.

Exploitation de la deuxième condition initiale : On calcule la dérivée de x(t) pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0)=B\omega_0$ or $\dot{x}(0)=0$ donc $B=0$. *d'où* $\boxed{x(t)=\frac{F}{m\omega_0^2}(1-\cos(\omega_0 t))+l_0}$ .or $m\omega_0^2=k$ d'où $\boxed{x(t)=\frac{F}{k}(1-\cos(\omega_0 t))+l_0}$ **Rép A.**

5. $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k(x-l_0)^2=\frac{1}{2}m\frac{F^2\omega_0^2}{k^2}\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}k\frac{F^2}{k^2}(1-\cos(\omega_0 t))^2$ or $\frac{\omega_0^2}{k}=\frac{1}{m}$ d'où

$E_m=\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}(\sin^2(\omega_0 t)+(1-\cos(\omega_0 t))^2)=\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}(2-2\cos(\omega_0 t))$ d'où $\boxed{E_m=\frac{F^2}{k}(1-\cos(\omega_0 t))}$. **Rép B.**

6. A partir du moment où l'on supprime la force , l'énergie mécanique se conserve. Lorsque le ressort est tiré au maximum , l' énergie cinétique de la perle est nulle d'où $\boxed{E_m=\frac{F^2}{k}(1-\cos(\omega_0\tau))=\frac{1}{2}kX_m^2}$ d'où

$\boxed{X_m^2=\frac{2F^2}{k^2}(1-\cos(\omega_0\tau))}$ d'où $\boxed{X_m=\frac{F}{k}\sqrt{2(1-\cos(\omega_0\tau))}}$. or cos 2x = cos²x-sin²x = 1-2 sin²x d'où

$\boxed{X_m=\frac{F}{k}\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)}=\frac{2F}{k}\left|\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)\right|}$. **Rép C.**

7. L'amplitude des oscillations est maximale quand $\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)=1$ soit pour la plus petite valeur de τ : $\frac{\omega_0\tau}{2}=\frac{\pi}{2}$. D'où

$\boxed{\tau=\frac{\pi}{\omega_0}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\pi\sqrt{\frac{0,2}{12}}=0,4\,s}$. **Rép A.**

8. La force $\vec{F}$ est une force constante donc $W_{\vec{F}}(x(0)\to x(\tau))=F\times[x(\tau)-x(0)]=\frac{F\times F}{k}(1-\cos(\omega_0\tau))$ or $\omega_0\tau=\pi$ d'où $\boxed{W_{\vec{F}_{op}}=\frac{2F^2}{k}}$.**Rép C.**

9. Lors de frottement fluides les oscillations par rapport à la position d'équilibre sont régis par une quation du type : $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$. Cette fois-ci $x= l-l_0$. La solution est du type : $x(t)=Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t+\phi)$. Le nombre d'oscillations étant important, on peut confondre pulsation propre et pseudo-pulsation. Ainsi pour t = 25 T_0 , $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}25T_0}=\frac{1}{2}$ soit $\frac{\omega_0}{2Q}25T_0=\ln 2$ or $\omega_0 T_0=2\pi$ d'où $\boxed{Q=\frac{25\pi}{\ln 2}=113\approx 110}$