

# Préparation DS 6

## Problème 1 : La grêle

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre.

Ce problème s'intéresse à la modélisation de leur chute.

### Partie 1 : Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse  $m$ , qui chute dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ . On note  $Oz$  un axe descendant vers le sol.  $z = 0$  marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note  $\vec{u}_z$  un vecteur unitaire orienté vers le bas. On néglige ici tout frottement.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en  $z = 0$ ).
2. Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse du grêlon en fonction de  $z$ .
3. Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ?

### Partie 2 : Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note  $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$  la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :  $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{u}_z$ .

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient  $\alpha$  est donné par  $\alpha = \frac{1}{2} \rho_{air} \pi R^2 C$ , avec  $\rho_{air}$  la masse volumique de l'air,  $R$  le rayon du grêlon et  $C = 0,5$ .

4. Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse  $v(t)$  du grêlon.
5. Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note  $v_{lim}$  cette constante. On donnera son expression en fonction de  $\alpha$ ,  $m$  et  $g$ . On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse  $v_{lim}$ , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours celles de la partie 2. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en python retranscrit ci-dessous :

```

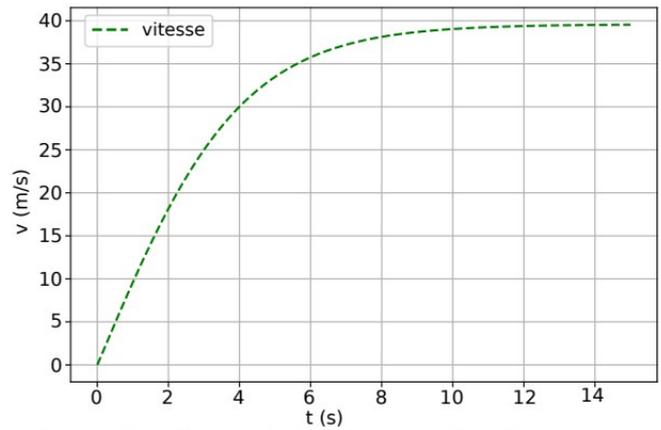
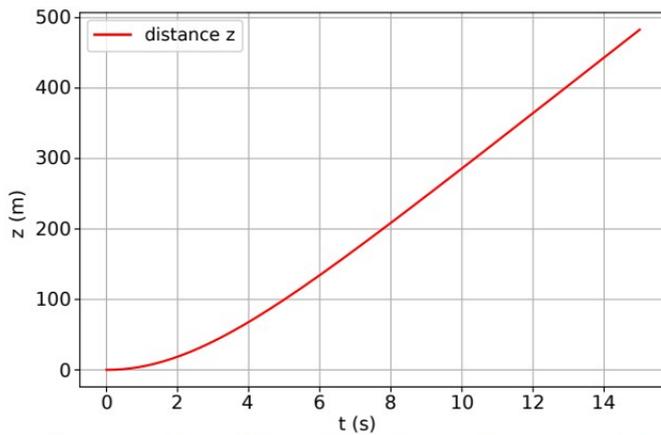
from math import*
import matplotlib.pyplot as plt
g = 9.8
alpha = 1.5e-3
m = 0.24
dt = 0.02 # pas d'intégration en secondes
fin = 15 # durée de la simulation en secondes
T=[0] # stocke la liste des temps
Z=[0] # stocke la liste des positions
V=[0] # stocke la liste des vitesses
nb_iterations = int(fin/dt)
for i in range(nb_iterations):
    T.append(T[-1] + dt) #T[-1] est le dernier élément de la liste T
    z1=[case 1 à compléter]
    v1=[case 2 à compléter]
    Z.append(z1)
    V.append(v1)
plt.plot(T,Z)
plt.show()
plt.plot(T,V)
plt.show()

```

Les valeurs de  $m$  et  $\alpha$  sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

6. Compléter la case 1 de l'algorithme.
7. Compléter la case 2 de l'algorithme.

8. Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position  $z(t)$  et de la vitesse  $v(t)$  obtenus par l'algorithme. La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ? Déterminer la distance  $z$  au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.



Document 9 : position  $z(t)$  et vitesse  $v(t)$  au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

## Problème 2 : Toboggan

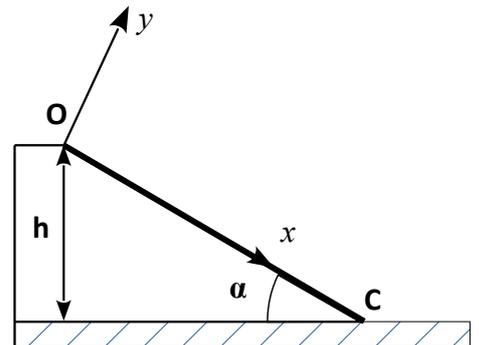
Dans tout le problème, un enfant de masse  $m=30\text{kg}$ , assimilable à un point matériel  $M$ , glisse sur différents toboggans. On étudie le mouvement de l'enfant dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige les frottements de l'air. L'intensité de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

### Première partie : toboggan rectiligne

Le toboggan est modélisé ci-contre (le schéma n'est pas à l'échelle).

L'enfant part à  $t = 0$  en O avec la vitesse  $v_0 = 0,50 \text{ m.s}^{-1}$ .

La hauteur de chute est  $h = 3,0 \text{ m}$  et l'angle  $\alpha = 45^\circ$ .



1. On suppose dans un premier temps que l'enfant glisse sans frottement sur le toboggan.
  - 1.1. Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'enfant  $x(t)$  en fonction de  $g$ ,  $\alpha$  et  $v_0$ .
  - 1.2. Déterminer sa vitesse d'arrivée au point C.
2. On suppose maintenant que l'enfant glisse en subissant des frottements de la part du toboggan. Le toboggan exerce alors sur l'enfant une réaction  $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$  où  $\vec{R}_T$  est sa composante tangentielle et  $\vec{R}_N$  sa composante normale.
 

On suppose que les 2 composantes obéissent à la loi du frottement solide, c'est à dire que lors du mouvement:  $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$  avec  $f$  une constante. On notera par la suite  $R_T = \|\vec{R}_T\|$  et  $R_N = \|\vec{R}_N\|$ .

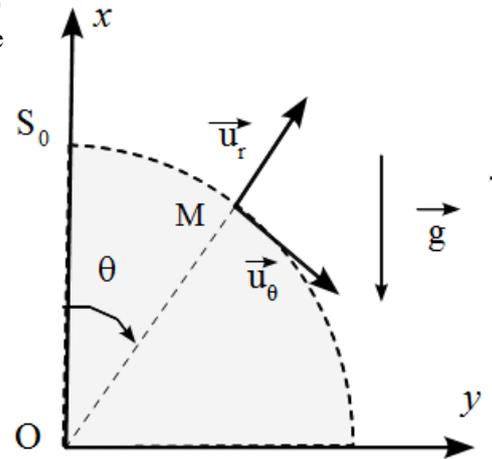
  - 2.1. Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'enfant  $x(t)$  en fonction de  $g$ ,  $f$ ,  $\alpha$  et  $v_0$ .
  - 2.2. Le temps de parcours sur le toboggan entre O et C est  $\tau = 1,2 \text{ s}$ , en déduire  $f$  et la vitesse à laquelle l'enfant arrive en C.

## Deuxième partie : toboggan circulaire

On considère un toboggan aquatique ayant la forme d'un arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $b=10m$  comme l'indique la figure ci-contre. Le revêtement ainsi que le filet d'eau qui s'écoule rendent **les frottements négligeables**.

L'enfant part en  $S_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  considérée comme nulle.

On considère le repère d'espace  $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .



- Établir, grâce à la 2<sup>ème</sup> loi de Newton, 2 équations différentielles vérifiées par  $\theta$  et  $R$  le module de la réaction du toboggan sur l'enfant. L'une s'appelle l'équation différentielle du mouvement identifier la et justifier votre réponse.
- Multiplier l'équation différentielle du mouvement par  $\dot{\theta}$ , puis en déduire par intégration la relation:  $b\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos\theta)$ .
- Grâce à l'autre équation, établir l'expression de  $R$  en fonction de  $m, b, g$  et  $\theta$ .
- Déterminer l'angle  $\theta_f$  pour lequel l'enfant quitte le toboggan en degré et en radian.
- Calculer la distance parcourue sur le toboggan.
- Établir l'expression de la vitesse  $v_f$  de l'enfant au moment où il quitte le toboggan en fonction de  $g, b$  et  $\theta_f$ . Faire l'application numérique.

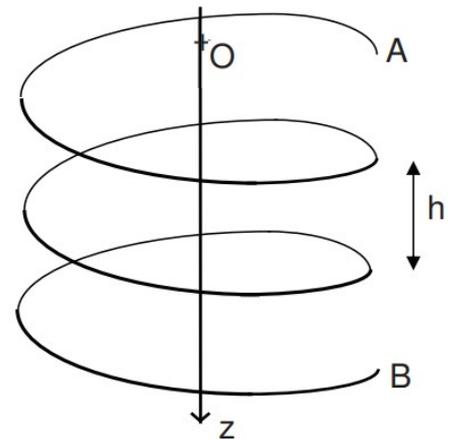
## Troisième partie : toboggan hélicoïdal

Le toboggan est représenté sur la figure ci-contre.

Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon  $R = 5 m$ . On néglige tout frottement.

A chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur  $h$ . L'enfant (repéré par le point M), initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ,  $z$  étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant. L'origine  $O$  de l'axe  $Oz$  est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

On note  $R(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  la base locale orthonormée directe associée au système des coordonnées cylindriques.



- Les équations de la trajectoire sont données par les relations :  $r(\theta) = R$  et  $z(\theta) = \gamma.\theta$  où  $\gamma$  est une constante positive. Exprimer  $h$  en fonction de  $\gamma$ .
- Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse du point M en fonction de  $R, \theta, z$  et de leurs dérivées temporelles  $\dot{\theta}, \dot{z}$ .
- Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2}A(\dot{z})^2 - Bz$  où A et B sont des constantes à expliciter en fonction des données  $m, R, g$  et  $h$ .
- Déterminer la vitesse  $v_s$  de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de  $g$  et  $h$ .
- Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $z(t)$  et en déduire la durée  $T$  de la descente en fonction de  $A, B$  et  $h$ .
- Si on prend en compte une force de frottement de norme constante  $F$ , exprimer l'énergie mécanique perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de  $F, R$  et  $h$ .

# Problèmes 3 : Etude de la réponse percussionnelle d'un diapason

Ce problème porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason.

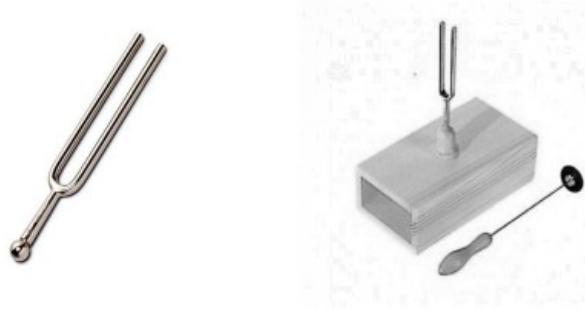


Figure 1 – Gauche : diapason de musicien. Droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse.

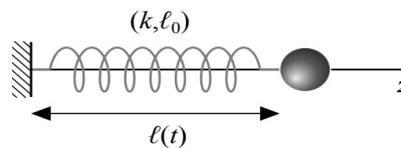


Figure 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal. La coordonnée  $z$  repère la position de la masselotte sur l'horizontale

On note  $m$  la masse de la masselotte,  $k$  la constante de raideur du ressort linéaire équivalent,  $l_0$  sa longueur à vide et  $l(t)$  sa longueur à l'instant  $t$  (voir figure 2).

De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$

1. Quel phénomène physique la force  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$  modélise-t-elle ? Justifier par un argument énergétique le signe de la constante  $\lambda$ .

À l'instant  $t = 0$ , on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour  $t > 0$ . Une note est alors émise.

2. On note  $z(t) = l(t) - l_0$  la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont  $z(t)$  est solution .

3. Exprimer la fréquence propre et le facteur de qualité  $Q$  de ce système en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\lambda$ .

4. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de  $z(t)$  en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\lambda$  et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de  $500 \text{ Hz}$  vaut  $30 \text{ g}$ . Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

5. Réaliser une estimation de la constante de raideur du ressort équivalent. De même, réaliser une estimation de la constante de raideur de ressorts utilisés en travaux pratiques ou dans la vie courante. Commenter.

6. Proposer une estimation du facteur de qualité du diapason. Comparer cette valeur à celle d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques ou de la vie courante.

7. Pour un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques, dont la période propre vaut une seconde, indiquer s'il est correct d'affirmer que la durée entre deux maxima successifs de la position de la masselotte vaut effectivement  $1,0 \text{ s}$ . On s'appuiera sur une discussion numérique à partir d'un développement limité à l'ordre 1 de la pseudo-période en  $1/Q^2$  .

8. De même, est-il correct d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre  $f_0$  oscillent à la fréquence  $f_0$  après percussion ?

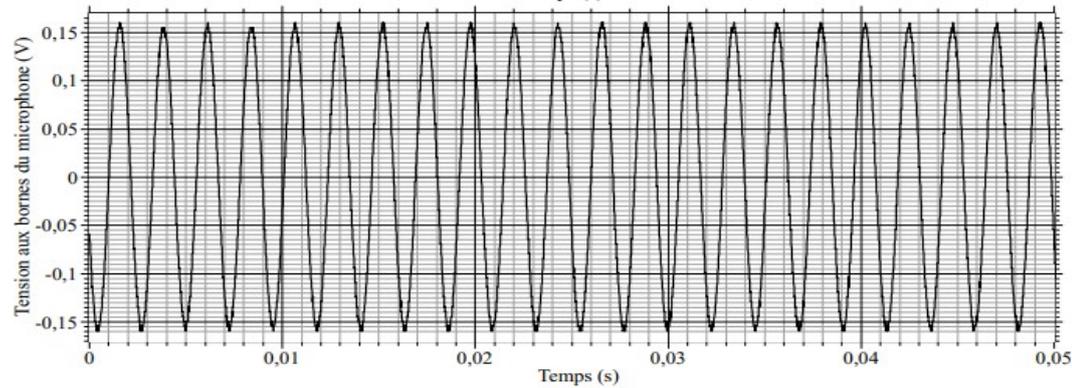
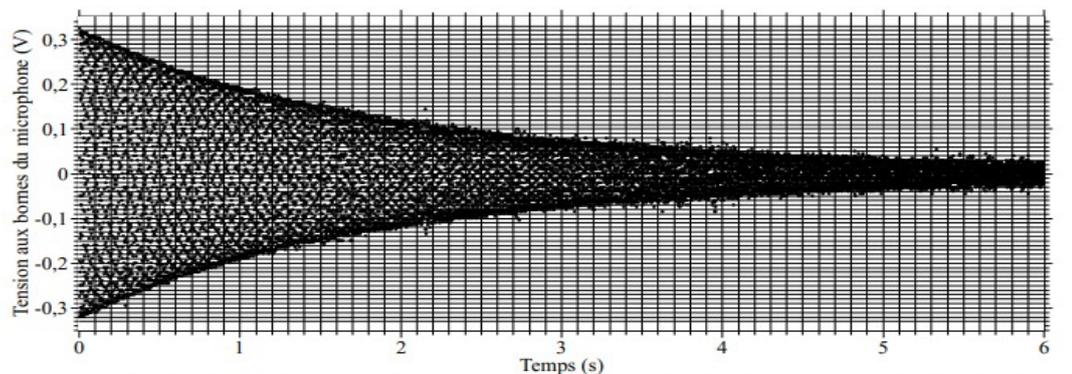
Pour préciser l'estimation précédente du facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore (voir schéma du montage, figure 3). On obtient les deux enregistrements présentés sur le document 1.



Figure 3 – Schéma du dispositif expérimental étudié dans la question 9

9. Exploiter le document 1 pour estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason A (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations). Comparer la valeur du facteur de qualité mesuré en présence de la caisse de résonance à celui du diapason en son absence. Commenter.

**Document 1 - Étude de la réponse percussionnelle**

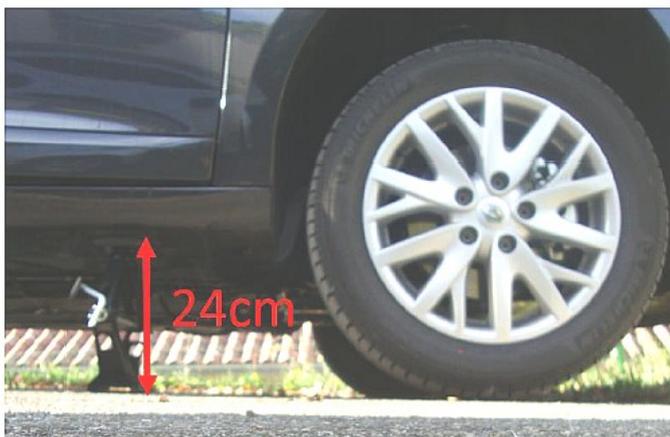


Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason A en réponse à une percussion avec le marteau (lors de deux mesures).

**Problème 4 : mal de transport ou pas ?**

Pour des fréquences inférieures à 0,5 Hz, les organes internes du corps entrent en résonance (en particulier l'estomac) et le mal des transports apparaît. Sera-t-on malade dans cette voiture ?

On donne deux photos d'une roue avec et sans cric :



Fin de l'énoncé

## Correction

**Correction problème 1 : La grêle** (concours ATS 2022)**Partie 1 : chute sans frottement**

1.  $E_p = -mgz + C$  (car axe Oz descendant) or  $E_p(0) = 0$  d'où  $C = 0$  d'où  $E_p = -mgz$ .

2. L'énergie mécanique du grêlon est :  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - mgz = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$ . En l'absence de frottements, le grêlon est soumis uniquement à son poids qui est une force conservative ainsi son énergie mécanique est constante.

**1ère méthode :**  $E_m(t) = E_m(0)$  d'où  $\frac{1}{2} m v^2 - mgz = 0$  compte-tenu des conditions initiales. D'où  $v = \sqrt{2gz}$

**2ème méthode :**  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  d'où  $\frac{1}{2} m 2 \dot{z} \ddot{z} - mg \dot{z} = 0$  d'où l'équation différentielle du mouvement :  $\ddot{z} = g$ . Par intégration

$\dot{z} = gt + C$  or  $\dot{z}(0) = 0$  d'où  $C = 0$ . d'où  $v(t) = \dot{z} = gt$ . Par intégration  $z = \frac{1}{2} g t^2 + C$  or  $z(0) = 0$  d'où  $C = 0$ , d'où  $z(t) = \frac{1}{2} g t^2$

d'où  $t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$  d'où  $v = \sqrt{2gz}$ .

3.  $v(10^3) = \sqrt{2 \times 10 \times 10^3} \approx 140 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 140 \times 3,6 \approx 500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . La vitesse est 5 fois plus grande que celle observée. Il ne faut pas négliger les frottements.

**Partie 2 : chute avec frottements quadratiques**

4. On se place dans le référentiel terrestre de repère d'espace  $(O, \vec{u}_z)$ .

Le bilan des forces appliqué au grêlon est : le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$  et le force de frottement  $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{u}_z$ .

On applique la 2ème loi de Newton au grêlon :  $m\vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{u}_z = \vec{P} + \vec{f} = mg\vec{u}_z - \alpha v^2 \vec{u}_z$  d'où l'équation demandée :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v^2 = g$$

5. Quand le grêlon atteint une vitesse constante  $\frac{dv}{dt} = 0$  d'où  $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$ .

6.  $z1 = Z[-1] + V[-1] * dt$

7.  $v1 = V[-1] + (g - \alpha * V[-1] * V[-1] / m) * dt$

8. La vitesse limite obtenue avec le modèle est de  $40 \text{ ms}^{-1}$  soit  $144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Cette vitesse limite se rapproche des observations mais reste élevée par rapport à la valeur attendue. Le grêlon atteint 75 % de sa vitesse limite au bout de 45 soit au bout de 75m.

## Correction problème 2 : Toboggan (banque PT 2022)

### Partie 1 : toboggan rectiligne

1.

1.1. Ref : terrestre de repère d'espace :  $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . Base de projection :  $(\vec{u}_x, u_y)$ , Coordonnées : cartésienne (x)  
Vecteurs cinématiques :  $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ ,  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$ ,  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ .

Bilan des forces : Poids :  $\vec{P} = m \vec{g} = m g \sin \alpha \vec{u}_x - m g \cos \alpha \vec{u}_y$ , la réaction du support :  $\vec{R} = R \vec{u}_y$  (pas de frottements)

2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$  d'où:

par projection sur l'axe Ox:  $m \ddot{x} = m g \sin \alpha$  (1) et par projection sur Oy:  $R = -m g \cos \alpha$  (2)

Par intégration le l'équation (1) en tenant compte des conditions initiales on obtient:

$$x(t) = \frac{1}{2} g (\sin \alpha) t^2 + v_0 t$$

1.2. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'enfant entre les points O et C :

$$E_c(C) - E_c(O) = W_{\vec{P}}^{OC} + W_{\vec{R}}^{OC} \quad E_c(C) = \frac{1}{2} m v_C^2 \quad ; \quad E_c(O) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad ; \quad W_{\vec{P}}^{OC} = mgh \quad ; \quad W_{\vec{R}}^{OC} = 0 \text{ car la réaction}$$

est orthogonale au déplacement. D'où  $v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ . AN :  $v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 7,7 \text{ ms}^{-1}$

2.

2.1.

Les hypothèses sont les mêmes qu'à la question 1.1. seule l'expression de la réaction change .

Bilan des forces : Poids :  $\vec{P} = m \vec{g} = m g \sin \alpha \vec{u}_x - m g \cos \alpha \vec{u}_y$ , la réaction du support :  $\vec{R} = -R_T \vec{u}_x + R_N \vec{u}_y$

2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$  d'où:

par projection sur l'axe Ox:  $m \ddot{x} = m g \sin \alpha - R_T$  (1) et par projection sur Oy:  $0 = -m g \cos \alpha + R_N$  (2)

De l'équation (2) on tire  $R_N = m g \cos \alpha$  or  $R_T = f R_N$  donc  $R_T = f m g \cos \alpha$ , en remplaçant dans l'équation (1) on obtient:  $\ddot{x} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ .

Par intégration en tenant compte des conditions initiales on obtient:

$$x(t) = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 + v_0 t$$

2.2. On pose  $d = x(\tau) = \frac{h}{\sin \alpha} = h \sqrt{2}$  d'où  $d = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2 + v_0 \tau$  de cette expression on tire :

$$f = \tan \alpha + 2 \left( \frac{v_0 \tau - d}{\cos \alpha g \tau^2} \right)$$

**Application numérique :**  $f = 1 + 2 \sqrt{2} \left( \frac{0,5 \times 1,2 - 3 \sqrt{2}}{10 \times 1,2^2} \right)$  d'où  $f = 0,29 \text{ SI}$

La vitesse correspondante est :

$$v(\tau) = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau + v_0 = 10 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{0,285}{\sqrt{2}} \right) \times 1,2 + 0,5 = 6,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### Partie 2 : toboggan circulaire

3. Repère d'espace :  $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$

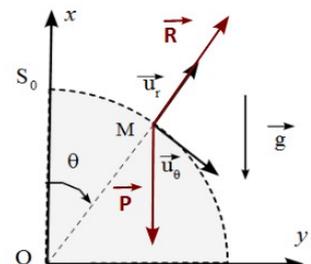
Base de projection la mieux adaptée :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ,

Vecteurs cinématiques :  $\vec{OM} = b \vec{u}_r$ ,  $\vec{v} = b \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\vec{a} = -b \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + b \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

Bilan des forces :

Poids :  $\vec{P} = -m g \cos \theta \vec{u}_r + m g \sin \theta \vec{u}_\theta$ , Réaction du support :  $\vec{R} = R \vec{u}_r$

2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$  d'où :



par projection suivant  $\vec{u}_r$  :  $-b m \dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R$  soit  $R = mg \cos \theta - b m \dot{\theta}^2$  (1)

par projection suivant  $\vec{u}_\theta$  :  $b \ddot{\theta} = g \sin \theta$  (2).

**L'équation (2) est l'équation du mouvement car il n'y a que  $\theta$  comme inconnue.**

4. On multiplie l'équation (2) par  $\dot{\theta}$  d'où  $b \ddot{\theta} \dot{\theta} = g \sin \theta \dot{\theta}$  or  $\ddot{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta})^2$  et  $\sin \theta \dot{\theta} = \frac{-d}{dt} (\cos \theta)$  en remplaçant dans (2) on obtient  $\frac{b}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta})^2 = -g \frac{d}{dt} (\cos \theta)$  et par intégration :  $\frac{b}{2} (\dot{\theta})^2 = -g (\cos \theta) + K$  avec K une constante que l'on détermine grâce aux conditions initiales. A  $t=0, v_0 = b \dot{\theta}_0 = 0$  et  $\theta_0 = 0$  on en déduit :  $K = g$  d'où  $b \dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta)$ .

5. On remplace  $b \dot{\theta}^2$  dans l'équation (1) on obtient alors :  $R = mg \cos \theta - 2mg(1 - \cos \theta)$

d'où  $R = mg(3 \cos \theta - 2)$ .

6.  $R(\theta_1) = 0$  d'où  $\cos \theta_1 = \frac{2}{3}$  .  $\theta_1 = \arccos \frac{2}{3} = 48,2^\circ = 0,841 \text{ rad}$  .

7.

7.1. La distance parcourue sur le toboggan est  $b \theta_1 = 10 \times 0,841 = 8,41 \text{ m}$  .

7.2.  $\vec{v}_1 = b \dot{\theta}_1 \vec{u}_\theta$  donc  $v_1^2 = b^2 \dot{\theta}_1^2$  or  $b \dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta)$  donc  $v_1 = \sqrt{2gb(1 - \cos \theta_1)}$

**Application numérique :**  $v_1 = \sqrt{2 \times 10 \times 10 (1 - \frac{2}{3})} = 8,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  .

### Partie 3: toboggan hélicoïdal

8. h est la distance verticale parcourue sur un tour complet ainsi  $h = 2\pi y$  .

9. Vecteurs cinématiques :  $\vec{OM} = R \vec{u}_r + z \vec{u}_z$  ,  $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$  .

10.  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - mgz = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$  or  $z = y \theta = \frac{h}{2\pi} \theta$  d'où  $\theta = \frac{2\pi z}{h}$  d'où  $\dot{\theta} = \frac{2\pi \dot{z}}{h}$  d'où

$$E_m = \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{2\pi \dot{z}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{2\pi R}{h} \right)^2 + 1 \right] (\dot{z})^2 - mgz.$$

Par identification :  $A = m \left[ \left( \frac{2\pi R}{h} \right)^2 + 1 \right]$  et  $B = mg$  .

11. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$E_c(B) - E_c(A) = W_{\vec{F}}^{AB} + W_{\vec{R}}^{AB}$  .  $E_c(B) = \frac{1}{2} m v_s^2$  ;  $E_c(A) = 0$  ;  $W_{\vec{F}}^{AB} = 3mgh$  ;  $W_{\vec{R}}^{AB} = 0$  car la réaction est

orthogonale au déplacement. D'où  $v_s = \sqrt{6gh}$  .

12. Comme il n'y a pas de frottements l'énergie mécanique de l'enfant est constante ainsi  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  soit

$\frac{1}{2} A 2 \dot{z} \ddot{z} - B \dot{z} = 0$  soit  $A \ddot{z} = B$  . Grâce aux conditions initiales on établit que  $z = \frac{B}{2A} t^2$  . La durée de chute

correspond à  $z=3h$  d'où  $3h = \frac{B}{2A} T^2$  d'où  $T = \sqrt{\frac{6hA}{B}}$  .

13. La force de frottement est colinéaire à la vitesse et de sens opposé . Sa puissance est :  $P_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -F \times \|\vec{v}\|$  car les deux vecteurs sont colinéaires et de sens opposé. Or  $v^2 = \left[ \left( \frac{2\pi R}{h} \right)^2 + 1 \right] (\dot{z})^2$  d'où  $P_{\vec{F}} = -F \times \sqrt{\left( \frac{2\pi R}{h} \right)^2 + 1} \dot{z}$  . D'après

le théorème de la puissance mécanique :  $\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{F}} = -F \times \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 + 1} \dot{z}$  d'où  $dE_m = -F \times \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 + 1} dz$  d'où

$$\Delta E_m = -F \times \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 + 1} \int_0^{3h} dz \quad \text{d'où} \quad \Delta E_m = -3hF \times \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 + 1} .$$

L'énergie perdue est  $-\Delta E_m = 3hF \times \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 + 1} .$

### Correction problème 3 : Réponse percussive d'un diapason (E3a MP 2022)

1.  $\vec{f} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$  est la force de frottement fluide, exercée par le fluide au contact des branches du diapason. La puissance transférée par frottement fluide des branches du diapason vers l'air qui les entoure permet de modéliser l'émission d'un son. Elle est dissipative du point de vue du diapason pour  $\lambda > 0$  (car la puissance de la force est alors  $-\lambda v^2 \leq 0$ ).

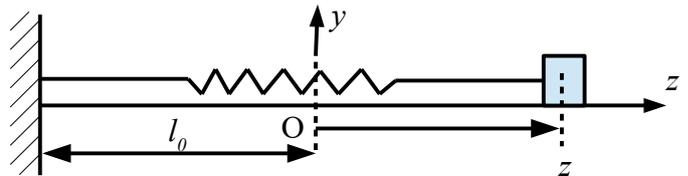
2. Ref d'étude: ref terrestre repère d'espace associé  $\mathbf{R}(\mathbf{0}, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  (l'origine est prise à la position d'équilibre)

Système: la masse

Coordonnées: cartésiennes ( $z$ ) ( $y=0$ )

Base de projection:  $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Vecteurs cinématiques:  $\vec{OM} = z \vec{u}_z \quad \vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z \quad \vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$



Bilan des forces:

- Poids:  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_y$
- Réaction du support:  $\vec{R} = R \vec{u}_y$  R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de frottement fluide  $\vec{f} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$
- Force de rappel du ressort:  $\vec{F} = -k(l-l_0) \vec{u}_z = -kz \vec{u}_z$

2ème loi de Newton:

- $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F}$
- Par projection sur les axes:  $m \ddot{z} = -kz - \lambda \dot{z}$  (1) et  $-mg + R = 0$  (2)

D'où l'équation du mouvement :  $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$ .

3. Pour déterminer la fréquence propre et le facteur de qualité, il faut identifier l'équation du mouvement à la forme canonique :

$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$  . D'où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$  . D'où  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$  .

4. A l'équation  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$  on associe l'équation caractéristique:  $x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$

Son discriminant est :  $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$  . Si les oscillations sont pseudo-périodiques  $\Delta < 0$ .

Les solutions de l'équation sont:  $x_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\mu \pm i \omega$  d'où  $z(t) = e^{-\mu t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\lambda^2}{4mk}\right)}$  et  $\mu = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\lambda}{2m}$  .

5.  $k = 4 \pi^2 f_0^2 m = 4 \pi^2 \times 500^2 \times 30 \cdot 10^{-3} = 29,6 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \approx 30 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Dans la vie courante ou en TP, on constate typiquement un étirement à l'équilibre  $\Delta l \approx 10 \text{ cm}$  si on suspend une masselotte de masse  $m=100\text{g}$  d'où  $k_{TP} = \frac{mg}{\Delta l} \approx \frac{1}{0,1} = 10 \text{ N/m}$ . Le ressort équivalent pour le diapason est nettement plus raide que celui d'un ressort de TP.

6. La durée du régime transitoire est de l'ordre  $5\tau$  avec  $\tau = \frac{1}{\mu} = \frac{2Q}{\omega_0}$  d'où

$Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{2 \times \pi \times 500 \times 30}{2 \times 5} = 9425 \approx 10^4$ . Pour un oscillateur masse-ressort de TP ou dans la vie courante, on compte typiquement une dizaine de pseudo-oscillations soit  $Q \approx 10$ . Le facteur de qualité du diapason est bien supérieur à celui de l'oscillateur masse-ressort de TP.

7. La pseudo période est  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$  en notant  $T_0$  la période propre. En toute rigueur l'affirmation est inexacte

puisque  $T$  est différente de  $T_0$ . En faisant un DL au 1<sup>er</sup> ordre pour  $Q \gg 1$  on obtient :  $T = T_0 \left( 1 - \frac{1}{8Q^2} \right)$ .

L'approximation peut être acceptable suivant la précision requise. Pour  $Q \approx 10$  l'écart relatif entre  $T$  et  $T_0$  est de l'ordre de 0,1 %.

8. Pour le diapason  $Q=10^4 \gg 1$ , la réponse est oui.

9. La deuxième figure donne  $f_0 = 11 / 25 \cdot 10^{-3} = 440 \text{ Hz}$ . La première figure donne  $\tau$  entre 1,5 et 2,0 s selon la méthode utilisée (tangente à l'origine ou  $0,37 \times$  la valeur initiale), d'où  $Q = \pi f_0 \tau = 3 \times 4,4 \cdot 10^2 \times 2 = 2,8 \cdot 10^3$ . La valeur de la fréquence correspond bien à l'estimation précédente, mais le facteur de qualité est plus faible. On peut penser que l'estimation à l'oreille était très grossière. On peut aussi penser que l'ajout de la cavité fait baisser  $Q$  : en présence de la caisse de résonance, l'émission sonore est plus importante donc l'atténuation plus rapide.

## Correction problème 4 : Mal de transport ou pas ?

On suppose que chaque amortisseur supporte la masse  $m$  de la voiture divisée par 4.

Schéma de la situation sans cric et avec cric :

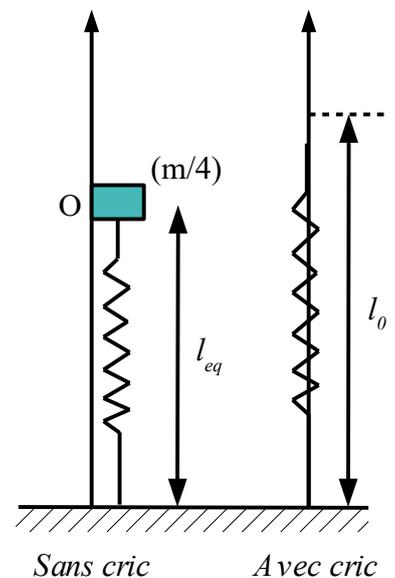
En appliquant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton, on montre que

$$l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{4k} \quad \text{d'où} \quad l_0 - l_{eq} = \Delta x = \frac{mg}{4k} = 24 - 14 = 10 \text{ cm} \quad (1)$$

De plus la pulsation des oscillations est  $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\pi f_0$

or d'après (1)  $\frac{4k}{m} = \frac{g}{\Delta x}$  d'où  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta x}}$

**Application numérique :**  $f_0 = \frac{1}{2 \times 3} \sqrt{\frac{10}{10^{-1}}} = \frac{10}{6} = 1,6 \text{ Hz} > 0,5 \text{ Hz}$



Lorsque la route présentera des défauts le système répondra avec des amplitudes élevées pour des fréquences autour de  $f_0$ . Il faut donc éviter que la fréquence de résonance du système voiture-amortisseurs soit proche de 0,5 Hz.

**On ne sera pas malade dans cette voiture.**