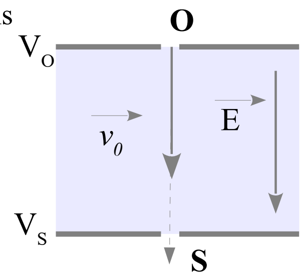
Préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques
Correction

Problème 1 : Détermination de la composition isotopique du chlore



1. U= V_O - V_S > 0 car le **champ électrique accélérateur** orienté de O vers S est dans le sens des potentiels décroissants.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ion entre O et S.

$\frac{1}{2}m v_s^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = W_{\vec{F_E}} O \rightarrow S = q V_O - q V_S = qU$ d'où $\boxed{v_s = \sqrt{2\frac{qU}{m}}}$ car $v_0 \ll v_s$.

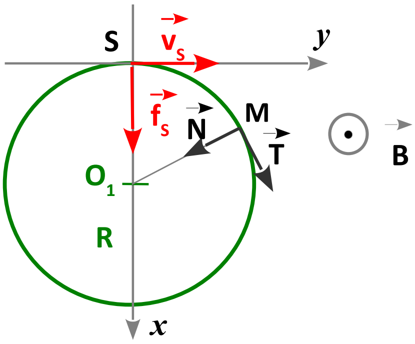
2. Dans la chambre de déviation :

2.1. La trajectoire des ions est circulaire.

2.2. La force magnétique est donnée par la relation : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ en S elle doit être orientée vers le centre de courbure on en déduit que $\vec{B}$ **doit être orienté vers le haut.**

2.3. Pour montrer que le mouvement est uniforme on applique le théorème de la puissance cinétique à la particule dans $\vec{B}$: $\frac{dE_C}{dt} = \vec{F_B}.\vec{v} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = 0$. On en déduit que E_c= cste d'où $\|\vec{v}\| = constante = v_S$.

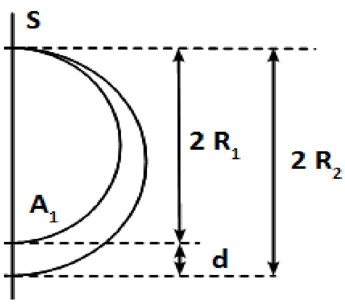
Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse .



2.4. Soit O_1, le centre de la trajectoire. Dans le référentiel terrestre de repère d'espace $R(O_1, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$, on exprime la vitesse et l'accélération de la particule dans la base de Frenet **au cours du mouvement**: $\vec{v} = v_s \vec{T}$ et $\vec{a} = \frac{v_S^2}{R}\vec{N}$. La force magnétique est : $\vec{F_b} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q v_S \vec{T} \wedge B\vec{u_z} = q v_S B \vec{N}$

D'après la 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F_B}$ d'où $m\frac{v_S^2}{R} = q v_S B$.

On obtient ainsi : $\boxed{R = \frac{m v_S}{q B}}$ en remplaçant v_s par son expression obtenue à la question 1. On obtient : $\boxed{R = \frac{m}{q B}\sqrt{2\frac{qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2 m U}{q}}}$



3. D'après la question précédente, on voit que le rayon de la trajectoire augmente avec la masse donc $R_2 > R_1$. D'où la représentation des 2 trajectoites :

4. $SA_1 = 2R_1$ donc R_1=20cm. De la question précédente on tire $B = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{2 m_1 U}{q}}$ d'où

$B = \frac{1}{20.10^{-2}}\sqrt{\frac{2 \times 34,968 \times 1,66054.10^{-27} \times 500}{1,6.10^{-19}}}$ d'où $\boxed{B = 95,3\, mT}$

5. D'après la question 2.4. $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ on en déduit : $R_2 = R_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ d'où

$R_2 = 20\sqrt{\frac{36,965}{34,968}} = 20,56\, cm$ $\boxed{d = 2(R_2 - R_1) = 2(20,56 - 20.00) = 1,13\, cm}$

6. Pour ^{35}Cl, le pourcentage isotopique est $P_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \times 100$ soit :

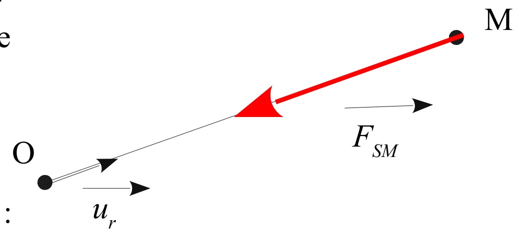
$$P_1=\frac{6,667}{6,667+2,132}\times 100=75,77\,\%$$ et $$P_2=\frac{2,132}{6,667+2,132}\times 100=24,23\,\%$$ pour ^{37}Cl

La masse molaire moyenne du clore est donc : $\boxed{M=34,968\times 0,7577+36,965\times 0,2423=35.45\,g.mol^{-1}}$

Problème 2 : NASA's Mars Exploration Program *(concours centrale PC 2022)*

I Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. La force exercée par le soleil (point O) sur un objet M de masse m est : $\boxed{\overrightarrow{F_{SM}}=\frac{-G M_S m}{r^2}\vec{u}_r}$.

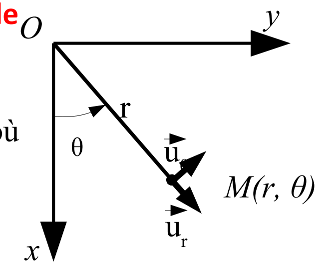


$[G]=\frac{[F][r^2]}{[M_S][m]}=\frac{MLT^{-2}L^2}{M^2}$ d'où les dimensions de G : $\boxed{[G]=L^3M^{-1}T^{-2}}$ et son unité dans le système international : $\boxed{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$.

2. On applique le théorème du moment cinétique en O à l'objet M dans le référentiel héliocentrique: $\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt}=\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_{SM}})=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F_{SM}}=r\vec{u}_r\wedge\frac{-G M_S m}{r^2}\vec{u}_r=\vec{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{L_O}(M)=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=\overrightarrow{cste}$.

3. A tout moment $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au moment cinétique . Or le moment cinétique est à tout moment suivant $\vec{u}_z$ donc $\overrightarrow{OM}$ est contenu dans le plan *(O,x,y)* à tout moment.

Conclusion : le mouvement est plan et le plan du mouvement est *(O,x,y)*. Dans le plan , on repère le point M grâce à ses coordonnées polaires.



On repère le point M grâce à ses coordonnées polaires (r, θ) :

$\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r$ et $\vec{v}=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $\overrightarrow{L_O}(M)=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=r\vec{u}_r\wedge m(\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$ d'où

$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)=mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z=mC\vec{u}_z}$ d'où $\boxed{C=\frac{L_O}{m}}$.

C est la constante des aires , c'est une constante du mouvement.

4. La trajectoire étant circulaire, r=R = cste d'où $\vec{V}=V\vec{u}_\theta=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}=-R\dot{\theta}^2\vec{u}_R+R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta=\frac{-V^2}{R}\vec{u}_r+\frac{dV}{dt}\vec{u}_\theta$.

D'après la 2ème loi de Newton appliquée à l'objet dans le référentiel héliocentrique : $m\vec{a}=\overrightarrow{F_{SM}}$. Par projection sur $\vec{u}_r$, on en déduit que $-m\frac{V^2}{R}=\frac{-G M_S m}{R^2}\vec{u}_R$ $\boxed{V=\sqrt{\frac{G M_S}{R}}}$.

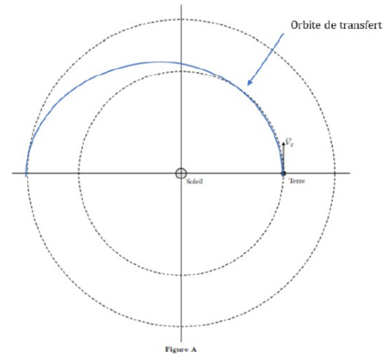
AN : $\boxed{V_T=\sqrt{\frac{G M_S}{R_T}}=2,98.10^4\,m.s^{-1}}$ (R_T = a_T) et $\boxed{V_M=\sqrt{\frac{G M_S}{R_M}}=2,42.10^4\,m.s^{-1}}$ (R_M=a_M).

II Aspect énergétique et 3ème loi de Kepler

5. $\boxed{E_C=\frac{1}{2}mV^2=\frac{G m M_S}{2R}}$; $\boxed{E_P=\frac{-G M_S m}{R}}$ d'où $\boxed{E_m=E_C+E_P=\frac{-G M_S m}{2R}}$.

6. La vitesse sur la trajectoire circulaire étant constante, $T=\frac{2\pi R}{V}$ d'où

$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}}$.



III Voyage aller Terre-Mars, orbite de transfert

7. ci-contre.

8. Le demi grand axe de l'orbite de transfert est a telle que : $2a = a_T + a_M$. L'énergie de l'objet sur l'orbite de transfert est $E_m = \frac{-GM_S m}{2a} = \frac{-GM_S m}{a_T + a_M}$ or

$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m V'^2_T - \frac{GM_S m}{a_T} = \frac{-GM_S m}{a_T + a_M}$ d'où $\frac{1}{2} m V'^2_T - \frac{GM_S m}{a_T} = \frac{-GM_S m}{a_T + a_M}$ d'où

$V'^2_T = 2GM_S\left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M}\right)$ d'où

$V'_T = \sqrt{2GM_S\left(\frac{a_M}{a_T(a_T + a_M)}\right)}$ or $V_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}} = \sqrt{\frac{GM_S}{a_T}}$ d'où $\boxed{V'_T = V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}}}$. On en déduit : $\boxed{\Delta V_T = V'_T - V_T = V_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1\right)}$. AN : $\boxed{\Delta V_T = 2{,}93.10^3\, m.s^{-1}}$.

9. La durée Δt du voyage est égale à la demi-période de révolution sur la trajectoire elliptique de demi grand axe : $a = \frac{a_T + a_M}{2}$. On détermine la période grâce à la 3ème loi de Képler : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}} = 2\pi\sqrt{\frac{(a_T + a_M)^3}{8GM_S}}}$ d'où $\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(a_T + a_M)^3}{2GM_S}}}$. AN : $\boxed{\Delta t = 2{,}23.10^7\, s = 259\ jours}$.

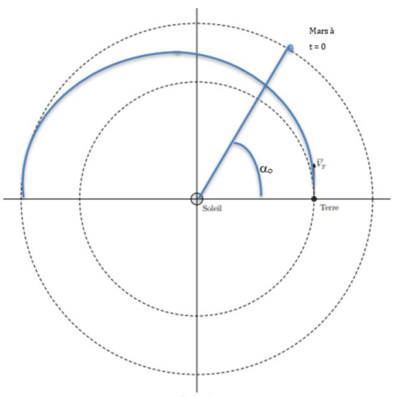


Figure A

10. La période de révolution de Mars est $T_M = \frac{2\pi R_M}{V_M}$. Pendant l'intervalle de temps Δt , Mars parcourt la distance $d_M = V_M \Delta t = \frac{2\pi R_M \Delta t}{T_M} = R_M \Delta\theta_M$ d'où l'angle parcouru : $\Delta\theta_M = \frac{2\pi\Delta t}{T_M}$. On en déduit : $\boxed{\alpha_0 = \pi - \Delta\theta_M = \pi - \frac{2\pi\Delta t}{T_M}}$.

AN : $\boxed{\alpha_0 = \pi - \frac{2\pi \times 259}{687} = 0{,}773\, rad = 44{,}3°}$.

11. Pendant la période de révolution T = 2Δt du vaisseau , la terre parcours l'angle $\Delta\theta_T = \frac{4\pi\Delta t}{T_T}$. AN : $\Delta\theta_T = \frac{4\pi \times 259}{365} = 8{,}92\, rad = 511°$. La terre a fait plus d'un tour l'angle correspondant est $\boxed{\theta_T = 511 - 360 = 151°}$. Le vaisseau ne pourra pas se poser sur la terre !

IV Durée de la mission

12. Le voyage retour à la même durée que le voyage aller. Pendant ce trajet la terre parcours l'angle $\Delta\theta_T = \frac{2\pi\Delta t}{T_T}$ soit $\Delta\theta_T = \frac{2\pi \times 259}{365} = 4{,}46\, rad = 255°$. L'angle $\boxed{\alpha_1 = 255 - 180 = 75{,}5°}$.

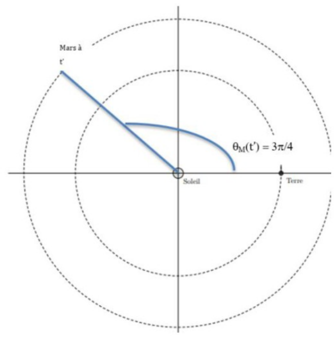
13. Soit t=0, l'instant du lancement de l'orbite terrestre. L'angle entre la terre et mars est : $\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{2\pi t}{T_M} - \frac{2\pi t}{T_T}$. La mission sur Mars se termine à l'instant t_1 tel que $\alpha(t_1) = \alpha_1 + 2n\pi$ avec n un entier relatif.
Rem : le Terre tournant plus vite que Mars, l'angle α(t) va rapidement devenir négatif donc n sera négatif.

On en déduit : $\boxed{t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi}{2\pi}\frac{T_T T_M}{T_T - T_M}}$. La première valeur positive de t1 est obtenue pour n=-1. $\boxed{t_1 = 712\ J}$. On doit soustraire la durée du voyage aller, donc la durée de la mission sur Mars est :

$\boxed{\Delta t_{Mars} = 712 - 259 = 453\ jours}$. La durée totale de la mission est $\boxed{\Delta t_{totale} = 712 + 259 = 970\ jours}$. La période $\Delta_{attente}$ entre deux fenêtres de lancement est telle que : $\boxed{\Delta t_{attente}(\omega_T - \omega_M) = 2\pi}$ soit $\boxed{\Delta t_{attente} = \dfrac{T_T T_M}{T_M - T_T} = 779\ J}$.

14. Ci-contre

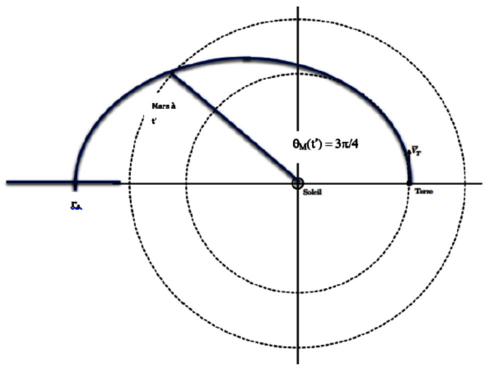
15. L'orbite proposée est une ellipse, et la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe soleil-terre, donc r est un extremum, en l'occurrence un minimum, donc $r_P = a_T$.



Q16. En $\theta = 0$ $\quad r_p = p\,/\,(1+e) = a_T$

En $\theta = 3\pi/4$ $\quad r = p\,/\,(1 - e/\sqrt{2}) = a_M$

d'où $e = \dfrac{a_M - a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}} + a_T} = \dfrac{228-150}{\frac{228}{\sqrt{2}} + 150} = 0{,}251.$



L'aphélie se trouve en $\theta = \pi$

$r_a = p/(1-e) = a_T\,(1+e)/\,(1-e)$ avec $p = a_T(1+e)$

$= a_T{*}1{,}251/0{,}749 = 1{,}67\ a_T$

Q17. Pour cette ellipse

$2a = r_P + r_a = a_T\left(1 + \frac{1+e}{1-e}\right) = a_T\left(\frac{2}{1-e}\right)$

Et d'après Q8

$Em = -G\frac{mM_S}{2a} = -ma_T.V_T^2(1-e)\,/\,2a_T = -m.V_T^2(1-e)/\,2$

Avec $GM_S = a_T V_T^{\ 2}$

Q18 Toujours d'après Q8 en $r = r_p = a_T$ $\quad Em = Ec(a_T) + Ep(a_T) = ½\ mV_T''^2 - G\frac{mM_S}{a_T}$

$-\ ½.m.V_T^2(1-e) = ½\ mV_T''^2 - mV_T^2$

$V_T'' = V_T\sqrt{1+e} = 3{,}34.10^4\ m.s^{-1}$

Q19. $\quad \Delta V_T' = V_T'' - V_T = V_T(\sqrt{1+e} - 1) = 2{,}98.10^4.(\sqrt{1+0{,}251} - 1) = 3{,}53.10^3\ m.s^{-1}$

Q20. $C = L_o/m = a_T.V_T''$

Q21. $dt = r^2 d\theta\,/\,C$ d'où

$\Delta t' = \frac{1}{C}\int_0^{3\pi/4} \frac{a_T^{\,2}(1+e)^2}{(1+e.\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{a_T(1+e)^2}{V''_T}{*}2{,}15 = 150.\,10^9\,\frac{(1+0{,}251)^2}{3{,}34.10^4}{*}2{,}15 = 1{,}51.10^7 s = 175\ \text{jours}$

La durée du transfert a été raccourcie de 259 – 175 = 84 jours.