D.S. Produit scalaire - Intégration - Corrigé

1. En partant de sa base canonique, construire par procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une b.o.n. de $R_2[X]$ (considéré comme un s.e.v. des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$).

   Pour $(.|.)$ le produit scalaire usuel sur les fonctions continues sur $[0,1]$, $(1|1)=1$. Ce vecteur est déjà normé, on pose $e_1=1$. On pose ensuite $e_2^0=X-(X|e_1)e_1=X-1/2$, qu'on renormalise en $e_2=\frac{X}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}$. On trouve encore $e_3=X^2-\frac{1}{144}X-\frac{95}{288}$.

2. Calculer la distance de $t\mapsto\sqrt{t}$ au s.e.v. des fonctions affines sur $[0,1]$, pour le produit scalaire usuel.

   Voir la feuille d'exercices.

3. Soit
$$A=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$
   On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
   On pose $\varepsilon_1=(1,1,1)$, $\varepsilon_2=(1,-1,0)$, $\varepsilon_3=(1,0,1)$ et $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Soient a, b et c trois réels, tels que $a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3=0_{\mathbb{R}^3}$, soit $(a+b+c,a-b,a+c)=(0,0,0)$. Nécessairement $a=b=c=0$: la famille est donc libre. Elle est de cardinal 3, dans un espace de dimension 3 : c'est une base de cet espace.

   (b) Ecrire la matrice de f dans cette base. On note cette matrice D.

   De rapides calculs montrent que $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3)=0$, donc
$$D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

   (c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

   On observe que $\varepsilon_3\in\ker f$, et que $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathrm{Im}f$. Le théorème du rang permet de conclure : (ε_3) est une base de $\ker f$, et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une base de $\mathrm{Im}f$.

   (d) Déterminer la matrice P de l'identité de la base $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

Les colonnes de cette matrice sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : cette matrice est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: on travaille avec les vecteurs de $\mathcal{B}$, et on sait exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$. C'est en ce sens que l'on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(e) Montrer que son inverse est la matrice

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel : le produit donne l'identité.

(f) Vérifier que $P^{-1}AP = D$

Ce qui revient à vérifier, la matrice P étant inversible, que $PDP^{-1} = A$.

☞**Retenir** La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'identité de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ (dans l'autre sens !)

Si X et X' expriment le même vecteur dans (*Resp.*) les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a $X = PX'$. Travaillant dans la base $\mathcal{B}$, on sait exprimer tout vecteur de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

Il suffit de calculer PD^nP^{-1} : le calcul d'une puissance de matrice que l'on sait diagonaliser se fait ainsi à petit coût.