Devoir surveillé n°7 sciences physiques

4h

Il sera tenu compte de la présentation de la copie. Les calculatrices sont autorisées.

PROBLEME 1 : Étude d'un satellite de télédétection terrestre

(barème sur 80 points)

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet le mouvement d'un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

Le satellite est assimilé à un point matériel M, la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $R_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté *t*. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindropolaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4{,}0.10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure 2.

Figure 1 - Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées ($r(t)$, $\theta(t)$, $z = 0$). Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et du vecteur vitesse $\vec{v_M}$ dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$ en fonction de *r*, *θ* et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10 \text{m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle s'exprime sous la forme : $E_p(r) = -g_0 m\left(\frac{R_T^2}{r}\right)$. En déduire l'expression de la force $\vec{F} = F(r)\vec{u_r}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0, *m*, R_T et *r*. L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\vec{F}$.

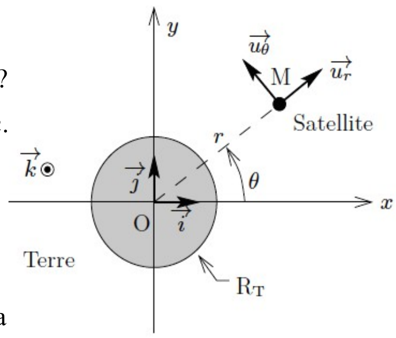


Figure 2

3) Soit $\vec{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v_M}$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de *r*, $\dot{\theta}$ et *m*. Montrer que le vecteur $\vec{L_0}$ est constant au cours du mouvement.

Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- **Phase balistique :** le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- **Phase de satellisation :** la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\vec{v_M}$ et le vecteur accélération $\vec{a_M}$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$ de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de *r*.

5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et *r*.

6) En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de *m*, g_0, R_T et *r*. Justifier le signe de E_m.

7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8{,}0.10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40.10^3$ km.

Étude énergétique du satellite

8) On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme : $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}}$.

9) On appelle énergie potentielle effective : $E_{p,eff}(r)=E_m-\frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $E_{p,eff}(r)\leq E_m$. Expliquer ce résultat.

10) Le graphe de $E_{p,eff}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

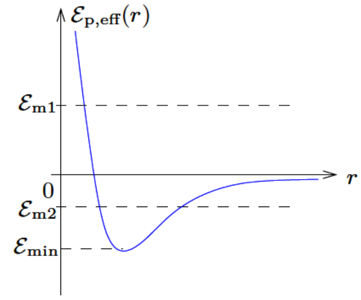


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

a) À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique? Justifier.

b) Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier.

Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse (r_b = 8,0.10^3 km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute (r_h = 40.10^3 km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périgée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite en A et en P à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

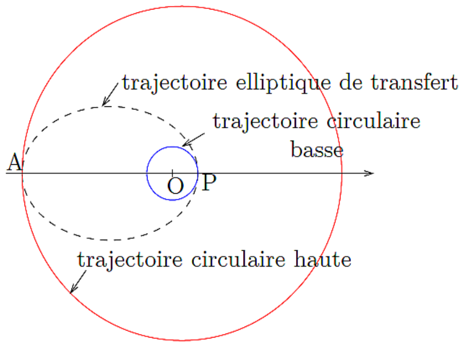


Figure 4

11) Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en A *($r = r_h$)* ou en P *($r = r_b$)* ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?

12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique E_{mt} sur l'orbite elliptique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2+\alpha r+\beta=0$. Exprimer α et β en fonction de m , L_0, E_{mt} , g_0 et R_T.

13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $E_{mt}=-\dfrac{g_0 m R_T^2}{2a}$.

14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique E_{mt} du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase **le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié.** Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

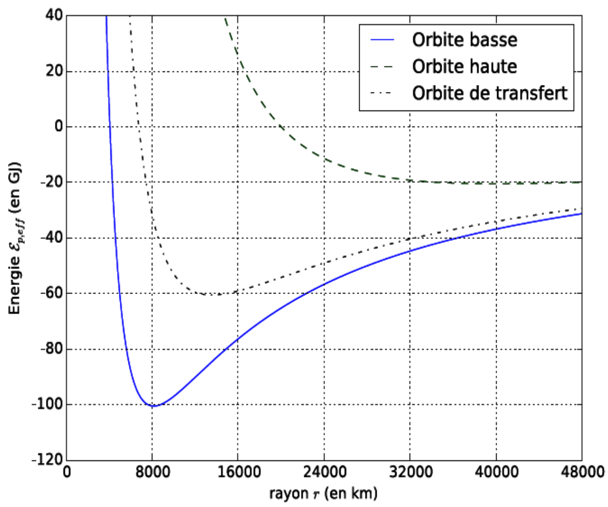


Figure 5 - $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0.10^3$ *km.*

De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40.10^3$ *km.*

16) En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mP} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg^{-1}, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle - t -on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

Chute du satellite

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement $\vec{f}=-k\vec{v}$. Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique $E_m(t)=-\dfrac{g_0 m R_T^2}{2r(t)}$ et de la vitesse $v^2(t)=\dfrac{g_0 R_T^2}{r(t)}$ restent valables.

18) À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r. Quelle est le nom de la relation obtenue?

19) À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon r(t) est solution de l'équation différentielle : $\frac{dr}{dt}+\frac{r(t)}{\tau}=0$, où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m. Montrer que τ est bien homogène à un temps.

20) En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0.

21) Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ et on négligera R_T devant r_0.

PROBLEME 2 : Station de gonflage *(barème sur 35 points)*

Dans tous ce problème, on note t_i et T_i les températures respectivement en °C et en K.

Données : $T(K) = t°C + 273$, $1 bar = 10^5$ Pa , intensité de la pesanteur $g=9,8 m.s^{-2}$.

Un poste mobile de gonflage de pneumatiques comporte un réservoir de volume V_1 = 15 L qu'on peut remplir d'air au poste fixe du garage sous la pression P_1 = 6,0 bars. L'air est assimilé à un gaz parfait.

1. La température du réservoir mobile est t_1=17°C sous la pression P_1, calculer le volume V'_1 qu'occuperait l'air contenu dans le réservoir s'il était détendu de manière isotherme à la pression P'_1=1,0 bar.

2. On utilise le poste mobile contenant de l'air sous la pression P_1 à la température t_1 pour compléter le gonflage d'un pneumatique de voiture à la température de 17°C.

La pression dans le pneu avant le gonflage est P_2 = 1,2 bars, la pression recommandée par le constructeur est P_3 = 2,0 bars et le volume V=35L de l'enveloppe supposé invariable. Établir l'expression du volume d'air introduit V_{intr} dans le pneumatique mesuré à 17°C sous P_1=6,0 bars pour amener la pression dans le pneu à la valeur requise en fonction de V, P_1, P_2, et P_3. Faire l'application numérique.

3. Établir l'expression de la pression finale P_4 de l'air dans le poste mobile à la fin du gonflage à 17°C en fonction de V, V_1, P_1, P_2, et P_3. Faire l'application numérique..

4. Après un parcours effectué à grande vitesse, la pression dans le pneumatique atteint la pression P_5 = 6, 0 bars (pression maximale). Sachant que lorsque la température du pneu est supérieure à 250°C, la gomme se dégrade, risque-t-on l'explosion ?

5. La masse de la voiture m = $1,2.10^3$ kg est également répartie sur les quatre pneumatiques. Déterminer la surface de contact S entre un pneumatique et le sol à la température de 17°C lorsque la voiture est à l'arrêt pneus gonflés correctement. On exprimera le résultat en cm².

6. Indiquer le choix de pression des pneumatiques pour éviter l'aquaplaning c'est à dire perte d'adhérence sur une route mouillée.

PROBLEME 3 : Évaluation d'un transfert thermique *(barème sur 35 points)*

Pour faire ce problème , le candidat devra faire en sorte de ne pas utiliser la constante des gaz parfaits R pour faire ses applications numériques.

Une certaine quantité de gaz parfait monoatomique est initialement dans l'état A défini par V_A = 10,0 L, T_A = 300 K et $P_A = 1,00.10^5$ Pa.

Elle subit alors une transformation isochore réversible l'amenant à un état B tel que T_B = 350 K, puis une transformation isotherme réversible l'amenant à l'état C avec $P_C = 1,00.10^5$ Pa.

1) Rassembler dans un tableau les différentes valeurs des pressions (en bar), températures en Kelvin) et volumes (en litre) dans les différents états.

2) Positionner les points A, B et C sur un diagramme de Clapeyron. Représenter les différentes évolutions.

3) En appliquant le 1er principe de la thermodynamique au gaz, établir l'expression en fonction de P_A, V_A, P_B et V_B puis calculer le transfert thermique Q_{AB} reçu par le gaz au cours de la transformation AB.

4) Établir l'expression en fonction de V_C, P_B et V_B puis calculer le transfert thermique Q_{BC} reçu par le gaz au cours de la transformation BC.

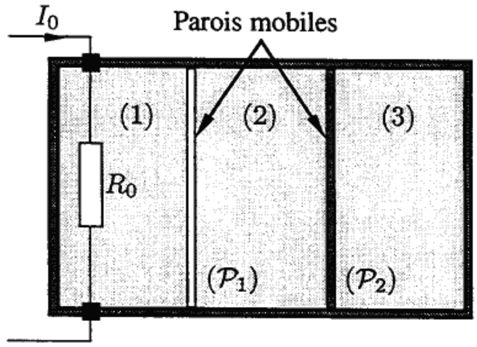
5) En déduire le transfert thermique Q reçu au cours de la transformation totale ABC.

6) Dans une autre expérience, le gaz passe directement de A à C par une transformation isobare réversible. Établir l'expression en fonction de V_C, P_A et V_A puis calculer le transfert thermique Q' correspondant.

7) Que peut-on en déduire ?

PROBLEME 4 : Transformations adiabatiques *(barème sur 30 points)*

Chaque question s'accompagne d'un choix de réponses. Il faudra indiquer la réponse ou les réponses choisie(s) après une justification rigoureuse.



Un récipient à parois rigides et calorifugées est divisé en trois compartiments étanches par deux cloisons mobiles (P_1) et (P_2) pouvant se déplacer sans frottement.

La cloison (P_1) est diathermane tandis que la cloison (P_2) est adiabatique (cf. figure ci-contre).

Les compartiments (1), (2) et (3) contiennent chacun une mole d'un gaz parfait.

Un générateur électrique fournit de l'énergie au gaz par l'intermédiaire d'un résistor de résistance R_0 , de capacité thermique négligeable, parcouru par un courant constant I_0 pendant une durée τ.

Dans l'état initial, les gaz sont à la même température T_0 et à la même pression P_0.

Ils occupent chacun le même volume V_0 . On désigne par R la constante des gaz parfaits et par $\gamma=\frac{C_P}{C_V}=1{,}4$ le rapport des capacités thermiques à pression constante C_P et à volume constant C_V.

On rappelle la relation de Mayer $C_P-C_V=nR$ où n est le nombre de moles de gaz considéré.

On fait passer un courant suffisamment faible pour que le système évolue lentement. On arrête le chauffage lorsque la température du compartiment (3) $T_{3f} = aT_0$ avec $a > 1$.

1. L'expression mathématique de la loi de Laplace est :

A) $P^{\gamma}T^{\gamma-1}=cste$; B) $P^{(1-\gamma)}T^{\gamma}=cste$; C) $T\,V^{(\gamma-1)}=cste$; D) $T\,V^{(1-\gamma)}=cste$

2. Calculer la pression finale P_f en fonction de P_0, a et γ.

A) $P_f=P_0 a^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}$; B) $P_f=P_0 a^{\frac{\gamma}{(1-\gamma)}}$; C) $P_f=P_0 a^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}$; D) $P_f=P_0 a^{\gamma}$

3. Calculer le volume V_{3f} du gaz dans le compartiment (3) en fonction de V_0, a et γ.

A) $V_{3f}=V_0 a^{(1-\gamma)}$; B) $V_{3f}=V_0 a^{\frac{-1}{\gamma}}$; C) $V_{3f}=V_0 a^{-\gamma}$; D) $V_{3f}=V_0 a^{\frac{1}{(1-\gamma)}}$

4. Exprimer le volume final V_{1f} du gaz dans le compartiment (1) en fonction de V_0, a et γ.

A) $V_{1f}=\frac{V_0}{2}\left(3-a^{(1-\gamma)}\right)$; B) $V_{1f}=\frac{V_0}{2}\left(3-a^{-\gamma}\right)$; C) $V_{1f}=\frac{V_0}{2}\left(3-a^{\frac{1}{(1-\gamma)}}\right)$; D) $V_{1f}=\frac{V_0}{2}\left(3-a^{\frac{-1}{\gamma}}\right)$

5. En déduire la température finale T_{1f} du gaz dans le compartiment (1) en fonction de T_0, a et γ.

A) $T_{1f}=\frac{T_0}{2}a^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\left(3-a^{\frac{-1}{(1-\gamma)}}\right)$; B) $T_{1f}=\frac{T_0}{2}a^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}\left(3+a^{\frac{-1}{(1-\gamma)}}\right)$;

C) $T_{1f}=\frac{T_0}{2}a^{\gamma}\left(3-a^{\frac{-1}{\gamma}}\right)$; D) $T_{1f}=\frac{T_0}{2}a^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}\left(3-a^{\frac{1}{(1-\gamma)}}\right)$

6. Calculer le travail l'énergie électrique E_g fournie par le générateur.

A) $E_g=\frac{R}{\gamma-1}\left(2T_{1f}+T_{3f}-3T_0\right)$; B) $E_g=\frac{R}{\gamma-1}\left(T_{1f}+T_{3f}+T_0\right)$;

C) $E_g=\frac{R}{\gamma-1}\left(T_{1f}-T_{3f}+T_0\right)$; D) $E_g=\frac{R}{\gamma-1}\left(2T_{1f}+3T_{3f}-3T_0\right)$

Fin de l'énoncé