Solution DS 07 (PCSI 2019-2020)

problème 1 : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre

(D'après ATS 2014)

Préliminaires :

1) $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}}$ et $\boxed{\overrightarrow{v_M} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

2) On sait que : $F(r) = -\frac{d\,\mathrm{Ep}(r)}{dr} = -\frac{d\left(-m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}$; D'où $\boxed{\vec{F} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$;

C'est donc **une force attractive.**

3) $\overrightarrow{L_0}$ est **le vecteur moment cinétique du point M par rapport à O.**

- $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v_M} = r\,\overrightarrow{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$; Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{L_0} = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{k}}$;
- Donc : $\boxed{L_0 = \left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = m\,r^2\,|\dot{\theta}|}$;
- Système : le satellite en M ;
  Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.
  Seule force $\vec{F}$; Son moment par rapport à O : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}}$, car vecteurs colinéaires.
  Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \vec{0}$; Soit $\boxed{\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{cst}}$;

Mise en orbite circulaire du satellite :

4) Trajectoire circulaire de rayon r, donc $\dot{r} = 0$; Alors $\overrightarrow{v_M} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; Ou encore : $\boxed{\overrightarrow{v_M} = v\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

Et $\overrightarrow{a_M} = \frac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta} - v\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$; Ou encore : $\boxed{\overrightarrow{a_M} = -\frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{v}\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

5) Seule force $\vec{F} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$; PFD : $\vec{F} = m\overrightarrow{a_M}$; Ainsi : $m\left(-\frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{v}\,\overrightarrow{u_\theta}\right) = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$;

En projetant sur les 2 axes, il vient : $\boxed{\dot{v} = 0}$; Ainsi : $\boxed{v = cste}$: Le mouvement est donc uniforme.

$$\frac{v^2}{r} = g_0\,\frac{R_T^2}{r^2} \text{ ; Soit : } \boxed{v^2 = g_0\,\frac{R_T^2}{r}} \text{ ;}$$

6) $E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2$; Ainsi : $\boxed{E_C = \frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r}}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r} - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$; Ainsi : $\boxed{E_m = -\frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r}} = -E_C$; $\boxed{E_m < 0}$, normal car **c'est un état lié.**

7) $E_m(r_b) = -\frac{4.10^3 \times 10 \times (6{,}4.10^6)^2}{2 \times 8.10^6}$; On trouve : $E_m(r_b) \approx -1.10^{11}$ **J.**

Et $E_m(r_h) = -\frac{4.10^3 \times 10 \times (6{,}4.10^6)^2}{2 \times 40.10^6}$; On trouve : $E_m(r_h) \approx -2.10^{10}$ **J.**

Étude énergétique du satellite :

8) Le système n'est soumis qu'à une force conservative, donc son E_m est constante.

- De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\overrightarrow{v_M} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; Donc : $\boxed{v_M^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2}$.

D'où : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,v_M^2 - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,mr^2\,\dot{\theta}^2 - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$;

De plus, on a vu au 3) que : $L_0 = \left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = m\,r^2\,|\dot{\theta}|$; Donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$ et $m\,r^2\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m\,r^2}$.

Ainsi : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m\,\frac{R_T^2}{r}}$. CQFT.

9) On a : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 \geq 0$.Donc à chaque instant, on doit avoir : $\boxed{E_m \geq E_{P,eff}(r)}$;

10) a) Pour la trajectoire elliptique, il faut un domaine de variation de r qui soit borné, donc il faut un état lié, $\boldsymbol{Em} = \boldsymbol{E_{m2}} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r_{min} \leq r \leq r_{max}$;

Pour la trajectoire hyperbolique, il faut un domaine de variation de r qui soit non borné, donc il faut un état de diffusion, $\boldsymbol{E_m} = \boldsymbol{E_{m1}} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r \geq r'_{min}$;

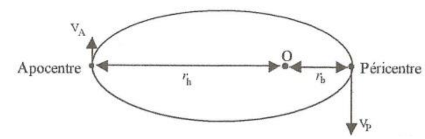
b) Pour la trajectoire circulaire, il faut que r soit constant, donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur. $\boldsymbol{E_m} = \boldsymbol{E_{min}} \geq E_{P,eff}(r)$ impose r = cste.

Mise en orbite haute du satellite :

11) En A ou en P, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{v_A}$, donc la composante en $\overrightarrow{u_r}$ est nulle, ainsi $\boldsymbol{\dot{r} = 0}$;

Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$;

D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $\boxed{\boldsymbol{r_h + r_b = 2a}}$;



12) D'après la question 8), on sait que $E_{mt} = \frac{1}{2}\, m\,\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

Or en A et en P, $\dot{r} = 0$, donc en ces points $E_{mt} = 0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

D'où : $r^2\, E_{mt} = \frac{L_0^2}{2m} - g_0 m\, r\, R_T^2$; Ou encore $\boxed{: r^2 + \frac{g_0 m\, r\, R_T^2}{E_{mt}} - \frac{L_0^2}{2mE_{mt}} = 0}$;

Par identification, il vient : $\boxed{\alpha = \frac{g_0 m\; R_T^2}{E_{mt}}}$ et $\boxed{\beta = -\frac{L_0^2}{2mE_{mt}}}$;

13) On a $r^2 + \alpha\, r + \beta = 0$; $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$; $r_{h,b} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; Ainsi $\boxed{: r_h + r_b = 2a = -\alpha}$;

D'où : $2a = -\frac{g_0 m\; R_T^2}{E_m}$ et $\boxed{\boldsymbol{E_{mt} = -\frac{m\, g_0\, R_T^2}{2a}}}$; CQFT.

14) Au début du transfert, le satellite est en r_b = 8000 km sur l'ellipse de transfert.

Par lecture graphique, on obtient **Epeff = E$_{m,\ ellipse}$ ≈ - 35 GJ** (courbe du milieu)

$(\dot{r} \;\; = 0\; pour\; le\; point\; P\; donc\; Emt = Epeff(rb)$

15) De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : **E$_{m,b}$ ≈ - 100 GJ** (courbe du bas).

Et pour l'orbite haute : **E$_{m,h}$ ≈ - 20 GJ** (courbe du haut).

Rq : On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

16) En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : (E$_{m,b}$ ≈ - 100 GJ) à l'ellipse de transfert (E$_{m,\ ellipse}$ ≈ - 35 GJ), il faut donc lui fournir $\boldsymbol{\Delta\, E_{mP} = 65\ GJ}$.

Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit $m_C = \frac{65.10^9}{50.10^6} = \frac{65000}{50}$; Soit : $\boldsymbol{m_C}$ **=1300 kg**.

17) Les ergols utilisés dans la fusée Ariane sont **l'oxygène et l'hydrogène liquide**.

L'orbite géostationnaire **est l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km d'altitude**.

Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparait alors immobile pour l'observateur terrestre.

Chute du satellite :

18) L'énoncé nous donne la solution des questions **5)** et **6)** pour v^2 et E$_m$.

Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question **5)** que le mouvement était uniforme.

Alors $v = \frac{dist}{temps} = \frac{2\pi r}{T}$ (pour un tour) ; Soit : $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0 \frac{R_T^2}{r}$, d'après l'énoncé.

Donc **:** $\boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0\, R_T^2}}}$; On retrouve la 3ème loi de Kepler.

19) Théorème de l'énergie mécanique : Pour un système non conservatif (ce qui est le cas ici), car il y a des frottements, $\boxed{\boldsymbol{\frac{d\,E_m}{dt} = P\left(\overrightarrow{f_{nc}}\right) = \overrightarrow{f_{nc}}\cdot\vec{v}}}$; Ainsi ici, $\frac{d\,E_m}{dt} = -k\,v^2 = -k\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$;

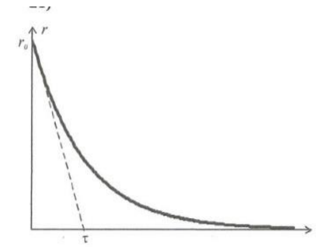
Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = -\ \frac{m\, g_0\, R_T^2}{2r(t)}$; Donc $\frac{d\, E_m}{dt} = \frac{m\, g_0\, R_T^2}{2r^2(t)} \times\ \dot{r}$

Ainsi : $\frac{m\, g_0\, R_T^2}{2r^2(t)} \times\ \dot{r} = -k\ g_0\ \frac{R_T^2}{r}$; D'où : $\boxed{\boldsymbol{\dot{r} + \frac{2k}{m}\ r(t) = 0}}$; Par identification, on a $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{m}{2k}}}$;

<u>Unité de τ</u> : $[\tau] = \frac{kg}{[k]} = \frac{kg}{N.s.m^{-1}} = \frac{kg}{kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}} = s$; <u>**τ est bien homogène à un temps**</u>**.** Car $\vec{f} = -k\ \vec{v}$.

20) Solution de l'EDL 1 : $r(t) = A\ e^{-t/\tau}$; Or $r(0) = r_0 = A$;

Donc : $\boxed{r(t) = r_0\ e^{-t/\tau}}$;



21) En toute rigueur, $r >\ R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de k n'est pas constante : $k(r)$.

En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.