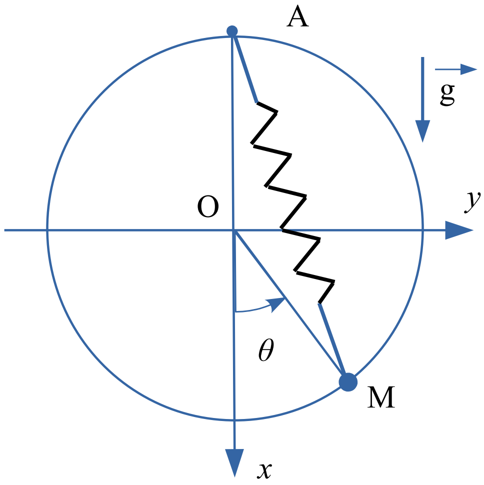
Préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques

Problème 1 : Corpuscule dans le champ de pesanteur

Préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques

Équilibre d'un ressort fixé à un cercle

Une masselotte M de masse m, peut coulisser sans frottement sur un cercle rigide de rayon a de centre O.
La masselotte est fixée à l'une des extrémités d'un ressort dont l'autre extrémité est attachée au point A du cercle. L'ensemble est disposé verticalement comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Le ressort est de masse négligeable, de longueur à vide l_0 et de raideur k . On considère $-\pi<\theta<\pi$.
Rappel de mathématiques : $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ *et* $\sin 2x=2\cos x\sin x$



1. Après avoir donné l'expression générale de l'énergie potentielle de pesanteur E_{Pp} , en déduire celle de la masselotte en fonction de *m, a,* $\cos\theta$, et *g*.
2. Après avoir donné l'expression générale de l'énergie potentielle élastique E_{Pe} , en déduire celle de la masselotte en fonction de *a,* $\cos\frac{\theta}{2}$, *k* et l_0
3. Déduire des 2 questions précédentes, l'énergie potentielle totale de la masselotte et Montrer que $\theta_{e1}=0$ est une position d'équilibre de M.
4. Montrer qu'il existe une autre position d'équilibre $\theta_{e2}\neq\theta_{e1}$ si $\frac{l_0}{2a}<1-\frac{mg}{ka}$. Exprimer θ_{e2} en fonction de m, *a*, l_0 , *g* et *k*.
5. On suppose : $\frac{l_0}{2a}=0{,}4$ et $\frac{mg}{ka}=0{,}2$.
   a) La position θ_{e2} existe-t-elle ? si oui, la calculer.
   b) Déterminer la stabilité de la ou des deux positions d'équilibre.

Préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques_correction

1. $\boldsymbol{E_{Pp}=-mgx}$ en supposant $E_{PP}(0)=0$ (signe – car l'axe est descendant) or $x=a\cos\theta$ donc $\boxed{\boldsymbol{E_{Pp}=-mga\cos\theta}}$

2. $\boldsymbol{E_{Pe}=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2}$ or $l=\|\overrightarrow{AM}\|$ et $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=(a+a\cos\theta)\vec{u_x}+a\sin\theta u_y$ d'où

$l=\sqrt{(a+a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}=a\sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta}=a\sqrt{2+2\cos\theta}$ or $\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x$ donc $l=a\sqrt{2(1+\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}=a\sqrt{2(1+\cos^2\frac{\theta}{2}-(1-\cos^2\frac{\theta}{2}))}$ d'où $\boldsymbol{l=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}$

or θ varie entre $-\pi$ et $+\pi$ donc $\frac{\theta}{2}$ varie entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{+\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\theta}{2}>0$ d'où $\boxed{\boldsymbol{l=2a\cos\frac{\theta}{2}}}$.

On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{E_{Pe}=\frac{1}{2}k(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0)^2}}$

3. $E_P=E_{Pp}+E_{Pe}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{E_P=-mga\cos\theta+\frac{1}{2}k(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0)^2}}$ les positions d'équilibre θ_e correspondent aux valeurs de θ telles-que : $\frac{dE_P}{d\theta}=0$ On calcule donc

$\frac{dE_P}{d\theta}=+mga\sin\theta+k(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0)(-a\sin\frac{\theta}{2})$ or $\sin 2x=2\cos x\sin x$ donc

$\frac{dE_P}{d\theta}=+2mga\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+k(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0)(-a\sin\frac{\theta}{2})=a\sin\frac{\theta}{2}(2mg\cos\frac{\theta}{2}-k(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0))$ donc

$\boxed{\boldsymbol{\frac{dE_P}{d\theta}=a\sin\frac{\theta}{2}[2\cos(\frac{\theta}{2})(mg-ka)+kl_0]}}$. Si $\theta=0$ $\sin\frac{\theta}{2}=0$ alors $\frac{dE_P}{d\theta}=0$ on en déduit que **$\boldsymbol{\theta_{e1}=0}$ est une position d'équilibre de M.**

4. $\frac{dE_P}{d\theta}=0$ pour $\sin\frac{\theta_{e1}}{2}=0$ et pour $2\cos\frac{\theta_{e2}}{2}(mg-ka)+kl_0=0$ soit

$\boldsymbol{\cos(\frac{\theta_{e2}}{2})=\frac{kl_0}{2(ka-mg)}}$ or $1>\cos\frac{\theta_{e2}}{2}=\frac{kl_0}{2(ka-mg)}>0$ la 2ème inégalité conduit à $ka>mg$ en considérant cette première condition la première inégalité conduit à $kl_0<2(ka-mg)$ soit $\boxed{\boldsymbol{\frac{l_0}{2a}<(1-\frac{mg}{ka})}}$.

5. $\frac{l_0}{2a}=0{,}4$ et $\frac{mg}{ka}=0{,}2$

a) $1-\frac{mg}{ka}=1-0{,}2=0{,}8>0{,}4$ la position θ_{e2} existe . $\cos\frac{\theta_{e2}}{2}=\frac{kl_0}{2(ka-mg)}=\frac{l_0}{2a(1-\frac{mg}{ka})}$ D'où

$\cos\frac{\theta_{e2}}{2}=\frac{0{,}4}{(1-0{,}2)}=0{,}5$ d'où $\frac{\theta_{e2}}{2}=\frac{\pi}{3}$ d'où $\boldsymbol{\theta_{e2}=\frac{2\pi}{3}}$

b) Pour déterminer la stabilité des équilibres, on calcule

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=\frac{a}{2}\cos\frac{\theta}{2}[2\cos(\frac{\theta}{2})(mg-ka)+kl_0]+a\sin\frac{\theta}{2}[-\sin\frac{\theta}{2}(mg-ka)]$ d'où

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=a[(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})(mg-ka)+k\frac{l_0}{2}\cos\frac{\theta}{2}]$ d'où $\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=a[\cos\theta(mg-ka)+k\frac{l_0}{2}\cos\frac{\theta}{2}]}}$

- Si $\theta=\theta_{e1}=0$ $\cos\theta_{e1}=1$ dans ce cas $\boxed{\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=a[(mg-ka)+k\frac{l_0}{2}]=ka^2[(\frac{mg}{ka}-1)+\frac{l_0}{2a}]}$

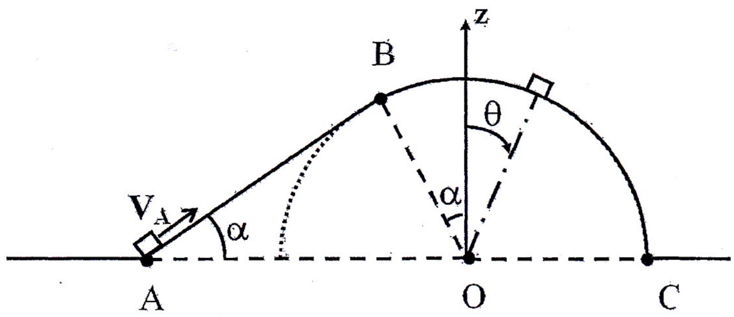
AN : $\boxed{\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=ka^2[0{,}2-1+0{,}4]=-0{,}4ka^2<0}$. On déduit de ce résultat que E_P est max pour $\theta_{e1}=0$ donc θ_{e1} **correspond à un équilibre instable.**

- Si $\theta_{e2}=\frac{2\pi}{3}$ $\cos\theta_{e2}=-0{,}5$ $\cos\frac{\theta_{e2}}{2}=0{,}5$ donc $\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=ka^2[-0{,}5(\frac{mg}{ka}-1)+0{,}5\frac{l_0}{2a}]$

AN : $\frac{d^2E_P}{d\theta^2}=ka^2[-0{,}5(0{,}2-1)+0{,}5\times0{,}4]=+0{,}4+0{,}2=0{,}6ka^2>0$. On déduit de ce résultat que E_P est min pour $\theta_{e2}=\frac{2\pi}{3}$ donc θ_{e2} **correspond à un équilibre stable.**

1. Palet sur une piste semi-circulaire (ENAC 2011)

Un palet M de masse m =5,0 kg, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle α = 30° par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon R = 2,0 m et d'angle $\widehat{BOC}$ = π/ 2 + α (cf figure ci-dessous). Le palet initialement lancé depuis A avec la vitesse V_A glisse sans frottement sur la piste. On désigne par g = 10 m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur.



1. Déterminer la vitesse V_B au point B en supposant que ce point est atteint. *Rep* : $V_B = \left(V_A^2 - 2gR\cos\alpha\right)^{1/2}$

2. Afin que B soit effectivement atteint par le palet, il est nécessaire que $V_A > V_{A,l}$. Évaluer $V_{A,l}$. *Rep* : $V_{A,l} \approx$ 5,89 m.s^{-1}

Pour les questions suivantes on suppose la condition précédente vérifiée : $V_A > V_{A,l}$.

3. Calculer la durée τ de parcours de la portion AB. *Rep :* $\tau = \dfrac{V_A - \left(V_A^2 - 2gR\cos\alpha\right)^{1/2}}{g\sin\alpha}$

4. Déterminer l'expression de la norme R_N de la réaction normale du support sur M lors de la phase du mouvement sur l'arc BC en fonction de $\theta = ((Oz), \overrightarrow{OM})$.*Rep :* $R_N = m(g\cos\theta - R \quad)$

5. A quelle condition sur V_A n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ? *Rep :* A) $V_A < (3\,R\,g\cos\alpha)^{1/2}$

6. On suppose la condition de la question précédente vérifiée. Déterminer la valeur θ_d de θ pour laquelle le palet quitte la piste.

Rep: $\theta_d = \arccos\left(\dfrac{V_A^2}{3gR}\right)$

2. Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire

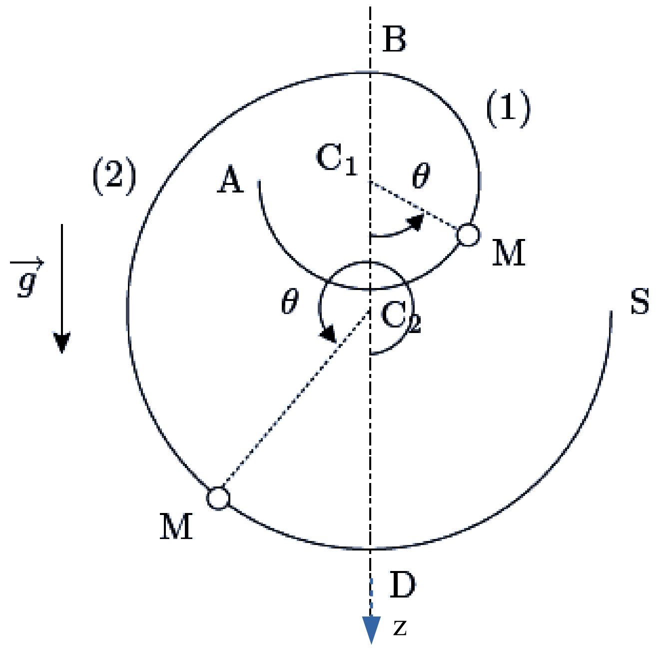
On considère un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M qui se déplace solidairement à une piste fixe située dans un plan vertical et formée de 2 parties circulaires:

- La partie (1) allant de A à B , de rayon R_1 et de centre C_1.
- La partie (2) allant de B à S , de rayon $R_2 > R_1$ et de centre C_2 à la verticale de C_1.

La position de l'anneau est repérée par l'angle θ :

- Sur la partie (1) il est mesuré à partir de C_1 et varie entre $-\frac{\pi}{2}$ (position en A) et π (position en B).
- Sur la partie (2) il est mesuré à partir de C_2 et varie entre π (position en B) et $\frac{5\pi}{2}$ (position en S).

Le glissement de l'anneau a lieu sans frottement. Le référentiel d'étude R lié à la piste est supposé galiléen. Le champ de pesanteur a pour intensité g.



1. Dans le cas d'un axe z descendant (voir figure), établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du point M en fonction de son abscisse z .

2. On fixe l'énergie potentielle nulle au point B. On cherche à exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de l'angle θ dans les parties (1) et (2) de la trajectoire.

2.1. Pour la partie (1) , afin de faciliter les calculs, on prend l'origine de l'axe z en C_1. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $Ep(\theta)$ en fonction de m, g, R_1 et θ . L'expression établie $Ep(\theta)$ dépend-elle de l'origine C_1 choisie sur l'axe z pour faire les calculs ? Expliquer.

2.2. Pour la partie (2) afin de faciliter les calculs, on prend l'origine de l'axe z en C_2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $Ep(\theta)$ en fonction de m, g, R_2 et θ .

3. Tracer l'allure $Ep(\theta)$. En déduire les positions d'équilibre de l'anneau. Préciser leur stabilité.

4. L'anneau étant situé en A, il est lancé à la vitesse v_0 vers le bas.

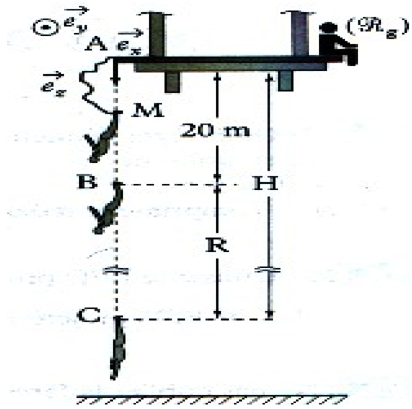
4.1. Montrer qu'au cours de son mouvement l'anneau gardera une énergie mécanique constante.

4.2. En déduire la condition sur v_0 pour que l'anneau puisse atteindre le point le plus bas de la piste D .

4.3. La condition précédente étant remplie, exprimer la vitesse v_D de passage en D en fonction des données v_0, g, R_1 et R_2.

4.4. A quelle condition sur v_0 l'anneau sort-il de la piste en S?

3. Saut à l'élastique



Un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel M, de masse m=70kg tombe depuis un pont (en A) avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B) l'élastique n'est d'aucune utilité le sauteur est donc en chute libre.
A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide l_0=20m et de raideur k=120N.m^{-1}.
On prend g=9,81m.s^{-2}
Le référentiel $R_g(A, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est supposé galiléen et on néglige tout frottement.

1. Déterminer grâce à des considérations énergétiques la vitesse du sauteur en B. *Rep:v_B=71,3km.h^{-1}*
2. Déterminer toujours grâce à des considérations énergétiques la hauteur totale de chute H. *Rep:H=41,9m*

Solution :

1. Ref : terrestre, système : le sauteur
On applique le théorème de l'énergie cinétique au sauteur entre les points A et B :

$$\boxed{E_C(B)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\to B)} \quad (1)$$

$$E_C(B)-E_C(A)=\frac{1}{2}mv_B^2-0=\frac{1}{2}mv_B^2 \quad \text{et} \quad W_{\vec{P}}=mgh \quad \text{donc d'après (1)} \quad \boxed{v_B=\sqrt{2gh}}$$

Application numérique : $\boxed{v_B=\sqrt{2\times9{,}81\times20}=19{,}8\,ms^{-1}=71{,}3\,km.h^{-1}}$

2. On applique le théorème de l'énergie cinétique au sauteur entre les points A et C :

$$\boxed{E_C(C)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\to C)+W_{\vec{T}}(B\to C)} \quad (2)$$

$$E_C(C)-E_C(A)=0 \quad ; \quad W_{\vec{P}}(A\to C)=mgH \quad ; \quad W_{\vec{T}}(B\to C)=E_{Pe}(B)-E_{Pe}(C)$$

$W_{\vec{T}}(B\to C)=0-\frac{1}{2}k(H-l_0)^2$ donc d'après (2) on en déduit : $mgH=\frac{1}{2}k(H-l_0)^2$ d'où l'équation du 2nd degré : $\frac{2mg}{k}H=H^2-2l_0H+l_0^2$ d'où $\boxed{H^2-(2l_0+\frac{2mg}{k})H+l_0^2=0}$

Application numérique : $H^2-(2\times20+\frac{2\times70\times9{,}81}{120})H+20^2=0$ d'où $H^2-51{,}445\,H+400=0$

$\Delta=51{,}445^2-4\times400=1046{,}588=32{,}35^2$ d'où $H_1=\frac{51{,}445-32{,}35}{2}=9{,}54\,m$ impossible car $< l_0$

$\boxed{H_2=\frac{51{,}445+32{,}35}{2}=41{,}9\,m}$ solution acceptable.

4. Double puits de potentiel

Soit une particule M se déplaçant sur l'axe ox sous l'action d'une force dérivant de l'énergie potentielle:

$$E_p = -\frac{1}{2}k\left[x^2 - \frac{x^4}{2a^2}\right]$$

où k et a sont des constantes positives.

1. Déterminer la ou les positions d'équilibre.
2. Établir l'équation du mouvement. En quoi n'est t- elle pas linéaire?
3. Tracer le diagramme d'énergie potentielle. Quels sont les mouvements possibles de la particule?
4. En déduire le portrait de phase.

5. Pendule : mesure d'une vitesse

On accroche une bille de masse m=200g au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L=1m. On repère la position de la bille grâce à l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante. On lâche la bille avec une vitesse nulle le fil faisant un angle $\theta_0=30°$ avec la verticale descendante .

On suppose le fil tendu à tout moment.

1. Faire un schéma du dispositif en précisant les différents paramètres.

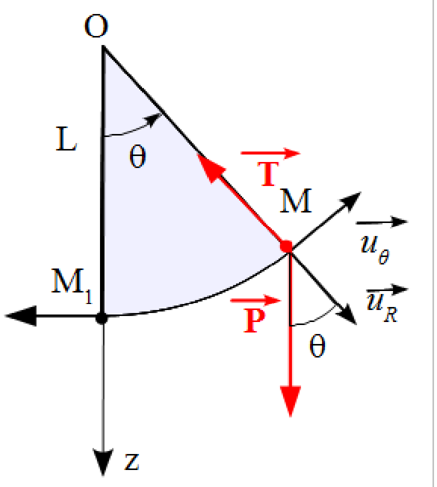
2. Montrer que le système est conservatif.

3. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m de la bille au cours de son mouvement en fonction de *v, m, L, g et θ*. En déduire l'expression de sa vitesse *v* en fonction de *m, L, g et θ*. Calculer la vitesse v_1 de la bille lors de son passage par la position verticale du fil.

4. De l'expression de E_m déduire l'équation différentielle du mouvement de la bille vérifiée par θ. La résoudre en faisant l'hypothèse des petits angles. En déduire la vitesse v_1' de la bille lors de son passage par la position verticale du fil en fonction de *L, g et θ₀*. Faire l'application numérique et conclure.

Solution :

1. Voir ci-contre.



2. On montre que le système est conservatif en faisant le bilan des forces :

La bille est soumis à son poids qui est une force conservative, et la tension du fil qui ne travaille pas. Conclusion : le système est conservatif $\boldsymbol{E_m=E_C+E_P=cste}$.

3. L'énergie cinétique est : $E_C=\frac{1}{2}mv^2$

L' énergies potentielles est : $E_P=-mgz+K=-mglcos\theta+mgl$ en prenant l'origine en M₁.

D'où l'expression de la conservation de l'énergie mécanique: $\boldsymbol{Em=\frac{1}{2}mv^2-mgLcos\theta+mgL}$.

$Em=Em(t=0)=\frac{1}{2}m0^2-mgLcos(30°)+mgL=mgL(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ d'où

$mgL(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{2}mv^2-mgLcos\theta+mgL$ d'où $\boldsymbol{v=\sqrt{2gL(\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2})}}$

AN : $v_1=\sqrt{2\times9{,}81\times1(cos0-\frac{\sqrt{3}}{2})}$ d'où $\boldsymbol{v_1=1{,}62\,m.s^{-1}}$

4. $\vec{v}=L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $Em=\frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2-mgLcos\theta+mgL$. On obtient l'équation du mouvement en dérivant l'expression de E_m : $\frac{dE_m}{dt}=0=\frac{1}{2}m\times2(L^2\dot{\theta})\ddot{\theta}+\dot{\theta}mgL\sin\theta$ d'où $\boxed{L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$.

Dans le cadre des petits angles $\sin\theta=\theta$. L'équation devient : $\boxed{\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0}$ avec $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$. La solution est du type : $\theta=A\cos\omega t+B\sin\omega t$. A t = 0 $\theta(0)=\theta_0$ d'où $A=\theta_0$. A t = 0 $v(0)=0$ d'où $B=0$ d'où $\boxed{\theta=\theta_0\cos\omega t}$ et $\boxed{v=L\dot{\theta}=-L\omega\theta_0\sin\omega t=-\sqrt{Lg}\,\theta_0\sin\omega t}$. Lorsque le fil est en position verticale $\theta=0$ donc $\cos\omega t=0$ d'où $\sin\omega t=\pm1$ d'où $\boxed{v_1'=\sqrt{Lg}\,\theta_0}$. AN : $\boxed{v_1'=\frac{\sqrt{1\times9{,}81}\times\pi}{6}=1{,}63\,m.s^{-1}}$

<u>Conclusion :</u> avec ou sans approximation on trouve le même résultat à moins de 1% près.

6. Oscillateur oblique (V1)

Le système représenté *figure 1* est constitué d'une glissière (*T*) soudée à un axe vertical Δ. La glissière et l'axe Δ font un angle α constant . Sur la glissière peut osciller sans frottement une bille M de masse m attachée à un ressort fixé en un point fixe A de Δ. Le ressort est à spires non jointives de raideur k de longueur à vide l_0. L' axe Δ est fixe dans le référentiel du laboratoire.

1) La masse est à l'équilibre, déterminer la longueur l_e du ressort en fonction de m, g, k, l_0 et α.

Rep: le= l_0 + (mgcosα)/k

2) On tire la bille d'une longueur X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille **par rapport à sa position d'équilibre.**

b) En déduire l'équation horaire du mouvement.

c) Déterminer l'énergie potentielle Ep(t) ainsi que de l'énergie cinétique Ec(t) de la bille .

d) Montrer qu'il y a conservation et équipartition de l'énergie mécanique de la bille. Représenter Ec(t) et Ep(t).

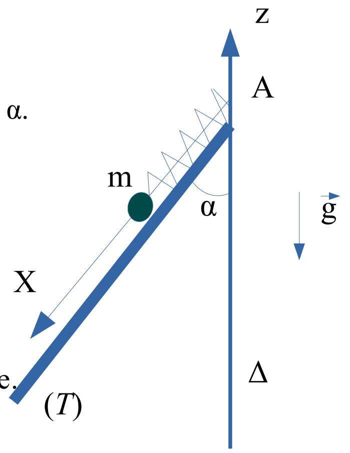
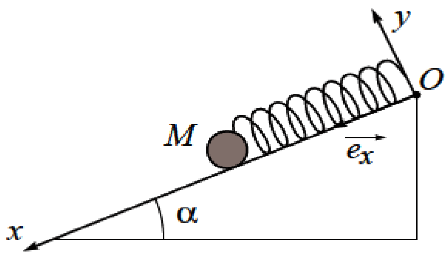


Figure 1

7. Oscillateur oblique (V2)

Soit un ressort de raideur k et de longueur `a vide l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O d'un plan incliné et à un point matériel M de masse m.

On pose OM = x et on suppose qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.



1) Déterminer l'abscisse xe de la masse M à l'équilibre.

Rep: le= l_0 + (mgsinα)/k

2) On tire la masse M d'une longueur X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

a. Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille **par rapport à sa position d'équilibre.**
b. En déduire l'équation horaire du mouvement.
c. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle Ep(t) ainsi que de l'énergie cinétique Ec(t) de la bille en fonction du temps.
d. Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique de la bille, et équipartition de l'énergie. Représenter Ec(t) et Ep(t).

Pendule sur un plan incliné

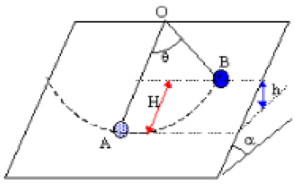
Un pendule pesant simple de longueur L est constitué d'un mobile autoporteur de masse m fixé à un fil inextensible. Il se déplace sur une table inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal. Les frottements sont négligés.

On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle pour la position d'équilibre du pendule (position A).

1. Décrire la trajectoire suivie par le centre d'inertie du pendule en oscillations.
2. On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0. Exprimer son énergie potentielle de pesanteur en B.
3. On abandonne le pendule sans vitesse initiale. Exprimer sa vitesse lors de son passage par la position d'équilibre en A.
4. Exprimer l'énergie mécanique du pendule en fonction de θ, écart angulaire à l'instant t (par rapport à OA) et sa dérivée par rapport au temps $d\theta/dt$ dans le cas de petites oscillations.
5. Etablir à partir de l'énergie mécanique l'équation différentielle du mouvement du centre de gravité G et en déduire l'expression de la période T.
6. Calculer sin α pour que cette période soit celle d'un pendule simple, de même longueur L, oscillant sur la lune dans un plan vertical.

donnée : $g_{Terre}/g_{Lune} = 6$.

Corrigé



trajectoire de la masse fixée au fil : un arc de cercle de rayon L, de centre O.

énergie potentielle de pesanteur : mgh

différence d'altitude entre A et B notée h : h = H sin α.

H = OA -OBcosθ = OA (1- cosθ)

h = L(1- cos θ) sin α.

énergie potentielle de pesanteur : mgh = mgL(1- cos θ) sin α.

vitesse en A :

au passage à la position d'équilibre en A l'énergie est sous forme cinétique : 0,5 m v^2

l'énergie mécanique se conserve : 0,5 mv^2 = mgh

d'où v^2 = 2gh = 2 g L(1- cos θ) sin α.

énergie mécanique pour une position quelconque :

somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur

0,5 m v^2 + mgh = Cte

0,5 m v^2 + L (1- cosθ) sin α = Cte

avec θ ' L = v et sin α une constante

équation différentielle du mouvement :

dériver par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique

0,5 m *2 v v' + mgL sin θ θ ' sinα = 0

tout diviser par la masse m : v v' + gL sin θ θ 'sin α = 0

remplacer v par : θ ' L

Lθ' v' + gL sin θ θ ' sin α =0

diviser par Lθ " : v' + g sin θ sinα =0

remplacer v' par : θ " L

L θ " + g sin θ sin α = 0

si θ petit (petites oscillations) sin θ voisin de θ radian

L θ " + g θ sinα = 0

θ " + g sinα /L θ =0

ω^2 = g sinα /L

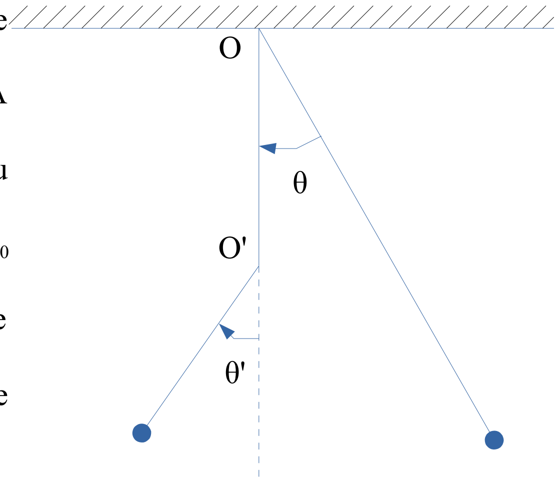
$\omega^2 = 4\pi^2 / T^2$

T = 2 π racine carrée (L / (g sin x))

pendule simple oscillant sur la lune : T = 2 π rac. carrée (6L/g_{Terre})

les périodes et les longueurs L sont égales donc 1 / sin α = 6 et sin α = 1/6.

1. Pendule simple buté



On étudie un pendule pesant constituée d'un fil souple de longueur l de masse négligeable auquel est accrochée une masse m que l'on assimilera à un point matériel. A la vertical du point d'attache O on place une butée O' (on note OO'= ε_1), ainsi durant la moitié du mouvement le pendule tourne autour de O puis pour l'autre moitié il tourne autour de O'. on l'écart d'un angle θ_0 =30° et on le lâche sans vitesse initiale.

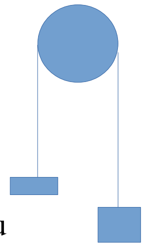
1- Quelle est la vitesse de la masse à la verticale de O et l'angle de remontée θ_0'?

2- Montrer qu'il est possible que le pendule s'enroule autour de la butée. calculer la valeur de ε si θ_0 =90°.

On rappelle qu'un pendule de longueur d a un mouvement circulaire si sa vitesse maximale Vm vérifie $Vm^2>5gd$.

8. Deux masses suspendues à une poulie

Deux masses m et M (M>m) sont reliées par un fil passant par une poulie de masse négligeable ainsi la tension a la même intensité pour m et M. Initialement elles sont immobiles et à la même altitude que l'on prendra comme origine.



1- En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la vitesse des masses lorsque la masse M est descendue de h.

2- Trouver l'équation différentielle vérifiée par Z l'altitude de M et déterminer Z(t), en déduire z(t) l'altitude de la masse m.

3- En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la tension du fil.