

Préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques

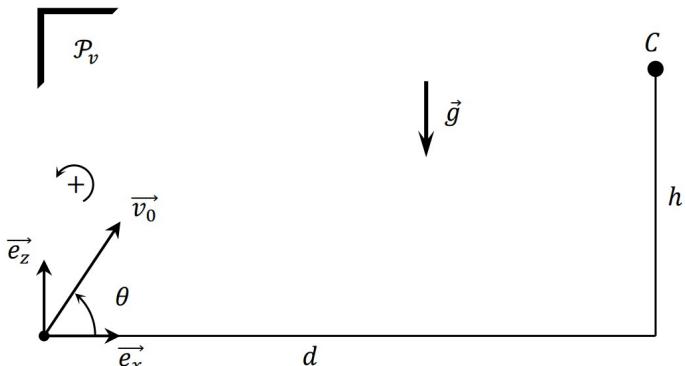
Problème 1 : Corpuscule dans le champ de pesanteur

Dans le référentiel galiléen du laboratoire supposé galiléen, un projectile A assimilé à un point matériel, est tiré à l'instant initial dans un plan vertical P_v depuis l'origine O d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, \vec{e}_z donnant le sens de la verticale ascendante.

Le vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 de A, de norme $v_0 = \|\vec{v}_0\|$, forme un angle θ avec l'axe $O\vec{e}_x$ (Fig. ci-contre).

On désigne par $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ le vecteur champ de pesanteur ($g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$) et on néglige tout frottement.

On considère une cible C placée à la distance d et à une hauteur h , dans P_v .



1. Établir les équations horaires du mouvement du projectile.
2. En déduire l'équation de la trajectoire.
3. Quelle condition doivent satisfaire v_0 et θ pour que l'altitude maximale, h_M , atteinte par A vérifie $h_M > h$?

A) $gh = \sqrt{v_0}/2$	C) $v_0 \sin \theta > \sqrt{gh}$
B) $v_0 \cos \theta > \sqrt{gh}$	D) $v_0 \sin \theta > \sqrt{2gh}$
4. Quelle relation v_0 et θ doivent-ils satisfaire pour que la cible soit atteinte ?

A) $\frac{-gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + d \tan \theta = h$	C) $\frac{gd^2}{v_0^2 \sin^2 \theta} + d \tan \theta = h$
B) $\frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} - d \tan \theta = h$	D) $\frac{gd^2}{2v_0^2 \sin^2 \theta} - d \tan \theta = h$
5. On fixe v_0 (jusqu'à la fin de cet exercice), θ devenant alors le seul paramètre variable. La cible n'est atteinte que lorsque : $K_1 \tan^2 \theta - d \tan \theta + K_2 = 0$ où K_1 et K_2 sont des coefficients indépendants de θ . Exprimer K_1 .

A) $K_1 = \frac{gd^2}{2v_0^2}$	B) $K_1 = \frac{gd^2}{v_0^2}$	C) $K_1 = \frac{2gd^2}{v_0^2}$	D) $K_1 = \frac{gd^2}{4v_0^2}$
--------------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--------------------------------
6. Exprimer K_2 .

A) $K_2 = h + \frac{gd^2}{2v_0^2}$	B) $K_2 = h$	C) $K_2 = \frac{gd^2}{v_0^2}$	D) $K_2 = h - \frac{gd^2}{v_0^2}$
------------------------------------	--------------	-------------------------------	-----------------------------------
7. La cible peut être atteinte si son altitude h ne dépasse pas une altitude limite $h_l(d, v_0)$. Exprimer $h_l(d, v_0)$:

A) $h_l(d, v_0) = \frac{-gd^2}{2v_0^2}$	C) $h_l(d, v_0) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}$
B) $h_l(d, v_0) = \frac{v_0^2}{2g}$	D) $h_l(d, v_0) = \frac{gd^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{g}$
8. La condition précédente étant respectée, combien de trajectoires contiennent la cible ?

A) Une seule trajectoire.	B) Deux trajectoires (ou une seule dans un cas limite).
C) Trois trajectoires (ou deux dans un cas limite)	D) Une infinité de trajectoires.

Problème 2: Chute d'une gouttelette d'eau dans l'air

On considère les valeurs numériques suivantes pour tout le sujet :

- intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2.10^{-5} \text{ Pa.s}$;
- viscosité dynamique de l'eau : $\eta_e = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$; masse volumique de l'air : $\rho_a = 1 \text{ kg.m}^{-3}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.
- Volume V d'une sphère de rayon R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; Surface S d'une sphère de rayon R : $S = 4\pi R^2$

Les résultats des applications numériques sont attendus avec seulement 1 chiffre significatif.

Un nuage est constitué d'une grande quantité de gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. Il se forme par condensation de la vapeur d'eau naturellement présente dans l'atmosphère lorsque les conditions météorologiques sont adéquates.

Ces gouttelettes en suspension grossissent en se réunissant sous l'effet des courants atmosphériques jusqu'à atteindre une taille critique, au-delà de laquelle elles tombent sous forme de pluie. Dans cette partie, nous allons étudier la chute d'une gouttelette d'eau à l'aide de deux modélisations pour l'atmosphère : le cas d'une atmosphère sèche, puis le cas d'une atmosphère humide.

1. Cas d'une atmosphère sèche

Dans un premier temps, on étudie la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique ρ_e et de rayon constant $R = 0,2 \text{ mm}$ dans une atmosphère sèche, constituée d'air de masse volumique ρ_a et de viscosité dynamique η_a . On néglige tout phénomène d'évaporation au cours de cette chute. A l'instant $t=0$, on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale. Elle est alors soumise à trois forces au cours de sa chute :

- son poids \vec{P} ;
- la poussée d'Archimède exercée par l'air \vec{P}_A ;
- une force de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme : $\vec{f} = -6\pi\eta_a R \vec{v}(t)$ avec $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe (Oz) vertical descendant, comme représenté sur la **Figure 1**.

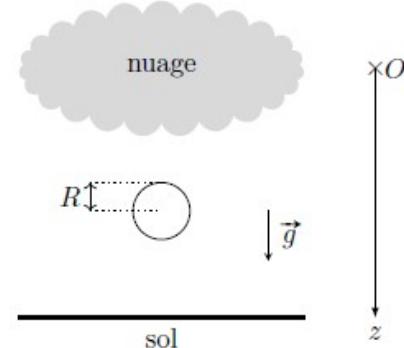


Figure 1 : Chute d'une gouttelette

d'eau de rayon constant R dans
une atmosphère sèche.

1. Exprimer la norme de la poussée d'Archimède subie par la gouttelette en fonction des données de l'énoncé.

2. Calculer numériquement le rapport, en norme, de la poussée d'Archimède sur le poids de la gouttelette, puis justifier qu'il est possible de négliger la poussée d'Archimède dans cette modélisation.

Dans la suite, on négligera ainsi toujours la poussée d'Archimède.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante $v(t)$ de la vitesse de la gouttelette projetée sur l'axe (Oz) vertical descendant.

4. A partir de cette équation différentielle, définir un temps caractéristique τ en fonction de R , ρ_e et η_a , puis calculer sa valeur numérique.

5. En déduire l'expression de $v(t)$ en fonction de g , τ et t .

6. Calculer numériquement la vitesse limite vers laquelle tend la gouttelette au cours de sa chute.

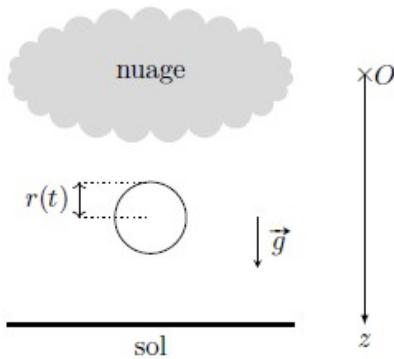
I.2. Cas d'une atmosphère humide

On étudie maintenant la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique ρ_e dans une atmosphère humide, principalement constituée d'air de masse volumique ρ_a et de viscosité dynamique η_a . L'humidité du milieu fait croître le rayon $r(t)$ de la gouttelette au cours de sa chute, et on note $m(t)$ sa masse. A l'instant $t=0$, on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale et avec un rayon initial r_0 . En supposant que la poussée d'Archimède est toujours négligeable, la gouttelette est alors soumise à deux forces au cours de sa chute :

- son poids \vec{P} ;
- une force de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme : $\vec{f} = -6\pi\eta_a r(t)\vec{v}(t)$ avec $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe (Oz) vertical descendant, comme représenté sur la **Figure 2**.

Figure 2 : Chute d'une gouttelette d'eau de rayon variable $r(t)$ dans une atmosphère humide.



7. En supposant que l'augmentation du volume V de la gouttelette au cours du temps est proportionnelle à sa surface S , soit $\frac{dV}{dt} = kS$ avec k une constante caractéristique de l'humidité du milieu, que l'on ne cherchera pas à exprimer. Montrer que son rayon peut alors s'exprimer sous la forme :

$$r(t) = r_0 + kt$$

8. Exprimer $\frac{dm}{dt}$ en fonction de ρ_e , r_0 , k et t .

Dans le cas d'un système de masse variable $m(t)$, on peut montrer que la 2^{ème} loi de Newton reste valable dans un référentiel galiléen à condition de remplacer le terme $\left\{m \frac{d\vec{v}}{dt}\right\}$ par $\left\{\frac{d(m\vec{v})}{dt}\right\}$, ce qui donne en développant : $\left\{m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}\right\}$.

9. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ de la gouttelette projetée sur l'axe (Oz) vertical descendant peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{A}{r_0 + kt} + \frac{B}{(r_0 + kt)^2} \right] v(t) = g$$

avec A et B des constantes que l'on exprimera en fonction de ρ_e , η_a et k .

Quelques instants après le début de sa chute, le rayon de la gouttelette devient suffisamment important pour que le terme $\frac{B}{(r_0 + kt)^2}$ de l'équation différentielle soit négligeable devant le terme $\frac{A}{r_0 + kt}$.

10. En prenant en compte cette simplification, résoudre l'équation différentielle obtenue en résolvant d'abord l'équation sans second membre, puis en cherchant une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une fonction affine, afin d'en déduire l'expression de $v(t)$ en fonction de g , r_0 , k et t .

Lorsque le rayon de la gouttelette d'eau dépasse quelques millimètres, il n'est plus réaliste de considérer que la forme de celle-ci est encore sphérique. En effet, la trainée aérodynamique donne alors une forme de disque incurvé à la gouttelette d'eau, qu'il serait nécessaire de prendre en compte.

11. Grâce à votre culture scientifique, donner le nom de l'énergie par unité de surface qui est responsable de la forme sphérique des gouttelettes d'eau de petites tailles.

Correction préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques

Problème 1 : Corpuscule dans le champ de pesanteur (d'après ENAC 2024)

1. Le repère d'espace est $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$; le système étudié est le projectile A. Les coordonnées adaptées sont les coordonnées cartésiennes.

Vecteurs cinématiques : $\vec{OA} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z$, $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{z} \vec{e}_z$, $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{z} \vec{e}_z$

Bilan des forces: $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$

2^{ème} loi de Newton: $m\vec{a} = \vec{P}$. Par projection sur les axes on obtient: $m\ddot{x} = 0$ (1) et $\ddot{z} = -g$ (2).

D'après les conditions initiales: $x(0) = 0$; $z(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$ et $\dot{z}(0) = v_0 \sin \theta$.

Par intégration des équations (1) et (2) on obtient: $x(t) = (v_0 \cos \theta)t$ (1') et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t$ (2')

2. De (1') on tire $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$. En remplaçant dans (2'). On obtient l'équation de la trajectoire:

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + \tan \theta x$$

3. Le point M d'altitude h_M est tel que $\left(\frac{dz}{dx}\right)_M = 0 = -g \frac{x_M}{v_0^2 \cos^2 \theta} + \tan \theta$ soit $x_M = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$ d'où en remplaçant

dans l'équation de la trajectoire : $h_M = -\frac{1}{2}g \frac{\frac{v_0^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{g^2}}{\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}} + \tan \theta \frac{\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}}{g}$ soit $h_M = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}$

d'où $h_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$. La condition $h > h_M$ conduit à $v_0 \sin \theta > \sqrt{2gh}$, réponse D.

4. Il suffit de remplacer z par h et x par d dans l'équation de la trajectoire d'où : $h = \frac{-gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + (\tan \theta)d$ réponse A.

5. Puisque $\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$ on peut écrire la précédente équation $h = \frac{-gd^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) + (\tan \theta)d$ puis la

mettre sous la forme $\frac{gd^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta - (\tan \theta)d + h + \frac{gd^2}{2v_0^2} = 0$ où l'on identifie $K_1 = \frac{gd^2}{2v_0^2}$: réponse A.

6. On identifie également $K_2 = h + \frac{gd^2}{2v_0^2}$: réponse A.

7. Pour avoir solution de l'équation de la question 9, il faut que $0 \leq d^2 - 4 \frac{gd^2}{2v_0^2} \left(h + \frac{gd^2}{2v_0^2} \right)$ soit $2v_0^2 d^2 \geq 4gd^2 \left(h + \frac{gd^2}{2v_0^2} \right)$ qui

donne $\frac{v_0^2}{2g} \geq h + \frac{gd^2}{2v_0^2}$ et enfin $h \leq h_I = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}$: réponse C.

Problème 2: Chute d'une gouttelette d'eau dans l'air (d'après banque PT 2024)

I.1 - Cas d'une atmosphère sèche

1 La poussée d'Archimède a pour norme

$$\|\vec{P}_A\| = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g .$$

2 Ce rapport s'écrit

$$\frac{\|\vec{P}_A\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g} \quad \text{donc} \quad \frac{\|\vec{P}_A\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\rho_a}{\rho_e} \simeq 10^{-3} \ll 1 .$$

3 Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la gouttelette dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{P} + \vec{f} .$$

En projection sur l'axe (Oz) descendant,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 6\pi \eta_a R v .$$

4 En se ramenant à une forme canonique,

$$\frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{6\pi \eta_a R}{m}}_{=1/\tau} v = g ,$$

on identifie

$$\tau = \frac{m}{6\pi \eta_a R} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e}{6\pi \eta_a R} \quad \text{soit} \quad \tau = \frac{2\rho_e R^2}{9\eta_a} \simeq 0,4 \text{ s} .$$

5 Les solution de l'équation différentielle s'écrivent

$$v(t) = A e^{-t/\tau} + \tau g .$$

Initialement,

$$v(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A + \tau g} \quad \text{donc} \quad A = -\tau g .$$

Finalement,

$$v(t) = \tau g(1 - e^{-t/\tau}) .$$

6 La vitesse limite s'identifie à la solution particulière,

$$v_{\lim} = \tau g = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

7 On considère l'équation donnée dans l'énoncé: $\frac{dV}{dt} = kS$.

En introduisant le rayon $r(t)$, cette équation s'écrit

$$\frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \frac{dr}{dt} = k \times 4\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dr}{dt} = k .$$

Par intégration immédiate, on constate que le rayon évolue bien de manière affine,

$$r(t) = r_0 + kt .$$

8 En reliant la masse au volume,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_e \frac{dV}{dt} = \rho_e \times k \times 4\pi r(t)^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dm}{dt} = 4\pi k \rho_e (r_0 + kt)^2 .$$

9 D'après la 2^{ème} loi de Newton adapte aux systèmes de masse variable :

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v &= mg - 6\pi\eta(r_0 + kt)v \\ \frac{4}{3}\pi\rho_e(r_0 + kt)^3 \frac{dv}{dt} + (4\pi k \rho_e(r_0 + kt)^2 - 6\pi\eta(r_0 + kt))v &= \frac{4}{3}\pi\rho_e(r_0 + kt)^3 g \\ \frac{2}{3}\rho_e(r_0 + kt)^2 \frac{dv}{dt} + (2k\rho_e(r_0 + kt) + 3\eta_a)v &= \frac{2}{3}\rho_e(r_0 + kt)^2 g \\ \frac{dv}{dt} + \left(\frac{3k}{r_0 + kt} + \frac{9\eta_a}{2\rho_e(r_0 + kt)^2}\right)v &= g \end{aligned}$$

ce qui s'identifie avec la forme donnée par l'énoncé en posant

$$A = 3k \quad \text{et} \quad B = \frac{9\eta_a}{2\rho_e}.$$

10 • **Solutions de l'équation homogène** : plusieurs méthodes sont envisageables, j'en propose ici deux.

▷ *Méthode 1 : comme en maths!* Les solutions d'une équation différentielle de la forme

$$y' + f(t)y = 0$$

s'écrivent à l'aide d'une primitive $F(t)$ de la fonction $f(t)$ et d'une constante C (qu'on peut, si on préfère, englober dans une constante indéterminée associée à la primitive « générale ») :

$$y(t) = C e^{-F(t)}.$$

Ici,

$$f(t) = \frac{A}{r_0 + kt} \quad \text{donc} \quad F(t) = \frac{A}{k} \ln(r_0 + kt) \quad \text{convient.}$$

si bien que

$$v_H(t) = C e^{-\frac{A}{k} \ln(r_0 + kt)} = C(r_0 + kt)^{-A/k} \quad \text{d'où} \quad v_H(t) = \frac{C}{(r_0 + kt)^3}.$$

▷ *Méthode 2 : séparation des variables.* L'équation différentielle peut s'intégrer sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{A}{r_0 + kt} dt \\ \int_{v_H(0)=C'}^{v_H(t)} \frac{dv}{v} &= -\frac{A}{k} \int_0^t \frac{k dt}{r_0 + kt} \\ \ln \frac{v_H(t)}{C'} &= -\frac{A}{k} \ln \frac{r_0 + kt}{r_0} \\ \ln \frac{v_H(t)}{C'} &= \ln \left(\frac{r_0 + kt}{r_0} \right)^{-A/k} \end{aligned}$$

d'où on conclut en passant à l'exponentielle

$$v_H(t) = C' \left(\frac{r_0 + kt}{r_0} \right)^{-A/k} \quad \text{d'où} \quad v_H(t) = C' \frac{r_0^3}{(r_0 + kt)^3}.$$

Le gros piège de cette méthode est de vouloir utiliser la condition initiale $v(t=0) = 0$ comme borne de l'intégrale ... or l'intégrale ne porte que sur la solution homogène, alors que la condition initiale concerne la solution complète, incluant aussi la solution particulière.

Par ailleurs, les constantes C et C' sont évidemment différentes : elles n'ont même pas la même dimension.

- **Solution particulière :** cherchons-la sous la forme

$$v_P(t) = at + b.$$

D'après l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} a + \frac{3k}{r_0 + kt}(at + b) &= g \\ a(r_0 + kt) + 3k(at + b) &= g(r_0 + kt) \\ (ak + 3ka - kg)t &= gr_0 - ar_0 - 3kb \end{aligned}$$

Le membre de gauche dépendant du temps mais pas celui de droite, les deux sont forcément nuls, donc

$$\begin{cases} ak + 3ka - kg = 0 \\ gr_0 - ar_0 - 3kb = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{g}{4} \\ \left(1 - \frac{1}{4}\right)gr_0 - 3kb = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = \frac{g}{4} \\ b = \frac{r_0 g}{4k} \end{cases}$$

d'où on conclut sur la solution particulière,

$$v_P(t) = \frac{gt}{4} + \frac{r_0 g}{4k}.$$

- **Solution de l'équation complète :** compte tenu de ce qui précède, cette solution est de la forme

$$v(t) = C' \frac{r_0^3}{(r_0 + kt)^3} + \frac{gt}{4} + \frac{r_0 g}{4k}.$$

À l'instant initial,

$$v(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 = C' \frac{r_0^3}{r_0^3} + 0 + \frac{r_0 g}{4k} \quad \text{donc} \quad C' = -\frac{r_0 g}{4k}.$$

Ainsi,

$$v(t) = \frac{r_0 g}{4k} \left(1 - \frac{r_0^3}{(r_0 + kt)^3}\right) + \frac{gt}{4}.$$

11 Il s'agit de la **tension de surface**, aussi connue sous les noms de tension superficielle ou interfaciale.