

Préparation devoir surveillé n°8 sciences physiques

Problème 1 : Étude d'un accéléromètre asservi

Le schéma de la figure 1 décrit le principe de fonctionnement d'un accéléromètre à masse sismique. La masse sismique, de centre d'inertie G peut se translater sans frottement le long de l'axe $O_1O'_1$ relié au boîtier de l'accéléromètre. Cette masse est par ailleurs fixée d'une part à l'extrémité libre d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 et d'autre part à un amortisseur exerçant une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \frac{d\vec{O_1G}}{dt}$. Les autres extrémités du ressort et de l'amortisseur sont fixées au boîtier.

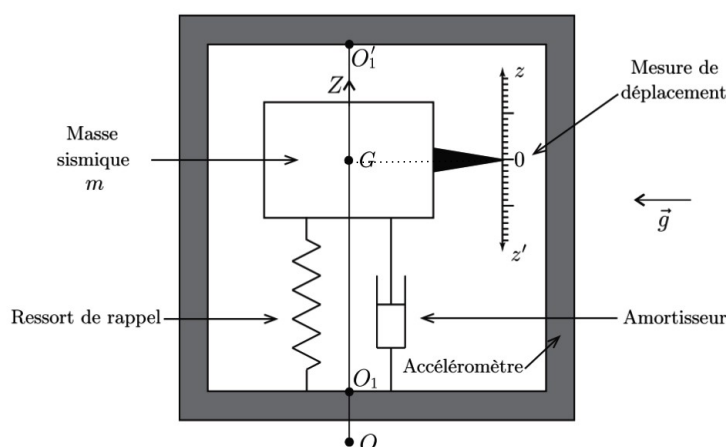


FIGURE 1 – Accéléromètre asservi à masse sismique.

On assimile dans tout le problème la masse sismique au point matériel G affecté de la masse m en négligeant les dimensions de la masse sismique.

On étudie donc le mouvement de G et du boîtier dans le référentiel terrestre supposé galiléen de repère d'espace $R(O, \vec{u}_z)$.

On se limite à l'étude d'un déplacement rectiligne selon la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ orthogonale à celle de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

On note O_1 le point du boîtier tel que $\vec{OO_1} = Z_1 \vec{u}_z$.

En posant $\vec{O_1G} = Z \vec{u}_z$, le point G est repéré par le vecteur $\vec{OG} = \vec{OO_1} + \vec{O_1G} = (Z_1 + Z) \vec{u}_z$.

Première étude : le boîtier est immobile

Dans cette première étude O_1 est fixe, Z_1 est donc constant. La masse sismique est reliée à la partie mobile (*triangle noir sur le schéma*) d'un capteur de position. On suppose que la translation du noyau mobile du capteur de position s'effectue sans frottement. On suppose également que le capteur de position n'engendre aucune force sur la masse sismique.

1. Le mouvement étudié est-il vertical ou horizontal ? Commenter le schéma proposer. Donner l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération de la masse sismique dans le repère $R(O, \vec{u}_z)$.
2. Faire le bilan des forces suivant $\vec{u}_z$ s'exerçant sur la masse en mouvement. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ sous sa forme canonique. En déduire la pulsation propre ω_0 et le coefficient de qualité Q du dispositif.
3. Déterminer la valeur Z_0 de Z à l'équilibre. On note z l'abscisse du centre d'inertie G sur l'échelle du capteur de position fixé au boîtier. Celle-ci est ajustée de telle manière que $z = 0$ lorsque le boîtier est immobile et la masse m à l'équilibre. Faire un schéma soigné, (où n'apparaîtra pas l'amortisseur) de la situation à l'équilibre et de la situation hors équilibre, faisant apparaître entre autre Z , Z_0 , Z_1 et z . En déduire la relation entre z et Z .
4. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une position $Z_i \neq Z_0$. Quelle est la valeur minimale λ_{min} qu'il faut imposer à λ afin que la masse retrouve sa position d'équilibre sans oscillation ? On supposera dans la suite que $\lambda \geq \lambda_{min}$.

Deuxième étude : Étude simplifiée du boîtier mobile

Désormais le boîtier de l'accéléromètre se déplace selon l'axe $(O, \vec{u}_z)$. On pose $v_1 = \frac{dZ_1}{dt}$ et $a_1 = \frac{d^2 Z_1}{dt^2}$.

5. Dans le référentiel terrestre, exprimer la vitesse de G , $\vec{V}_G$ en fonction de v_1 , $\frac{dZ}{dt}$ et $\vec{u}_z$, puis son accélération en fonction de a_1 , $\frac{d^2 Z}{dt^2}$ et $\vec{u}_z$. En déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ ainsi que les nouvelles positions d'équilibre Z'_0 de G et z'_0 de G sur le capteur. Quelle information apporterait la lecture de z'_0 au bout d'un temps infini sur l'échelle graduée de la figure 1 ?

Afin d'obtenir une mesure électrique du déplacement z , on utilise la tension $V_{out} = K z$ fournie par le capteur pour commander un dispositif moteur, non étudié ici, qui applique une force $\vec{F} = \beta V_{out} \vec{u}_z$ sur la masse sismique.

6. Établir les équations différentielles vérifiées par $Z(t)$ et $z(t)$. Déterminer l'expression de la valeur z_{eq} de z à l'équilibre et la valeur de V_{out} correspondante. Quelle information apporterait la mesure de V_{out} au bout d'un temps infini ?
7. Le mouvement de G se décompose en un régime transitoire suivi d'un régime permanent. Quelle est la condition que doit remplir λ pour que la durée du régime transitoire soit la plus petite possible ?
8. Estimer le temps de réponse de l'accéléromètre en supposant qu'il permette de mesurer l'accélération dans une manette de jeu vidéo.

Problème II : Détermination de la composition isotopique du chlore

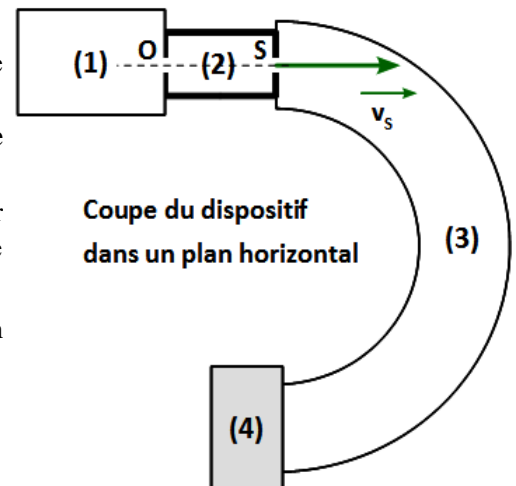
A l'état naturel, le chlore existe principalement sous forme de deux isotopes : ^{35}Cl et ^{37}Cl . Le but de ce problème est de déterminer sa composition isotopique grâce un spectrographe de masse.

Les vitesses intervenant dans le problème sont suffisamment faibles pour que les lois de la mécanique classique soient applicables.

Principe de fonctionnement du spectrographe de masse:

Il est constitué de trois chambres (1), (2) et (3) où règne un vide très poussé.

- Des ions sont produits dans la **chambre d'ionisation** (1) avec une vitesse négligeable.
- A travers une première fente, les ions produits pénètrent en O dans la **chambre d'accélération** où ils sont accélérés par une tension $U > 0$.
- Ils ressortent par une deuxième fente en S avec une vitesse $\vec{v}_S$ dépendant de leur masse et pénètrent dans la **chambre de déviation** où règne un champ magnétique uniforme et permanent orthogonal à $\vec{v}_S$.
- Les particules sont ensuite recueillies par un **détecteur** (4) sensible à la position et à l'intensité du flux de particules.



Étude générale pour un ion de charge $q > 0$:

1. Faire un schéma de la chambre d'accélération, représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$ régnant dans l'enceinte. Exprimer U en fonction de V_O et V_S les potentiels respectifs en O et en S .

Établir grâce au théorème de l'énergie cinétique l'expression de la vitesse v_s d'un ion de charge $q > 0$ et de masse m à la sortie de la chambre d'accélération.

2. Dans la chambre de déviation :

- 2.1. Quelle est la nature de la trajectoire de l'ion ?
- 2.2. Déterminer le sens de $\vec{B}$ pour que l'ion puisse atteindre le détecteur.
- 2.3. Montrer que le mouvement de l'ion est uniforme.
- 2.4. Déterminer soigneusement le rayon R de sa trajectoire en fonction de m , v_s , q et B puis en fonction de m , U , q et B .

Applications aux ions $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$

Les ions $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$ respectivement de masse m_1 et de masse m_2 sont produits dans la chambre d'ionisation à partir d'un échantillon de chlore naturel.

3. Faire un schéma de la chambre de déviation et représenter les trajectoires respectives de rayons R_1 et R_2 des ions $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$.

4. Les ions sont accélérés sous une tension $U=500 \text{ V}$. Déterminez le module B du champ magnétique pour que les ions $^{35}\text{Cl}^+$ viennent frapper le détecteur en A_1 à $40,00 \text{ cm}$ de l'endroit où ils pénètrent dans la chambre de déviation.

5. Dédurre à quelle distance d de A_1 se trouve le lieu d'impact A_2 des ions $^{37}\text{Cl}^+$ accélérés sous la même tension.

6. Pour un intervalle de temps donné, les quantités d'électricité reçues par le détecteur pour $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$ sont respectivement: $Q_1=6,667.10^{-8} \text{ C}$ et $Q_2=2,132.10^{-8} \text{ C}$. Déterminer la composition isotopique du chlore et sa masse molaire moyenne M .

Données numériques :

- masse des ions $^{35}\text{Cl}^+$: $m_1 = 34,968 \text{ u}$.
- masse des ions $^{37}\text{Cl}^+$: $m_2 = 36,965 \text{ u}$.
- L'unité de masse atomique : $1\text{u} = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Nombre d'Avogadro $N_a = \frac{10^{-3}}{1\text{u}} = 6.02214.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Charge élémentaire : $1,60.10^{-19} \text{ C}$

Correction préparation devoir surveillé n°8 sciences physiques

Correction problème 1 : Étude d'un accéléromètre asservi (Concours Mines-Télécom, 2022)

Première étude : le boîtier est immobile

1. Le mouvement est horizontal, le schéma porte à confusion si on ne fait pas attention. On assimile la masse sismique au point matériel G. Dans le repère d'espace $R(O, \vec{u}_z)$:

le vecteur position est $\vec{OG} = (Z_1 + Z)\vec{u}_z$, le vecteur vitesse est $\vec{V}_G = \dot{Z}\vec{u}_z$ (car Z_1 est constante) et l'accélération est $\vec{a}_G = \ddot{Z}\vec{u}_z$.

2. Le bilan des forces suivant $\vec{u}_z$ est :

- La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(O_1G - l_0)\vec{u}_z = -k(Z - l_0)\vec{u}_z$.
- La force de frottement : $\vec{f} = -\lambda \frac{d\vec{OG}}{dt} = -\lambda \dot{Z}\vec{u}_z$.

D'après la 2^{ème} loi de Newton appliqué à G affecté de la masse m : $m\vec{a}_G = \vec{F} + \vec{f}$
d'où $m\ddot{Z}\vec{u}_z = -k(Z - l_0)\vec{u}_z - \lambda\dot{Z}\vec{u}_z$ d'où l'équation : $m\ddot{Z} + \lambda\dot{Z} + kZ = kl_0$ d'où

l'équation sous sa forme canonique : $\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = \frac{kl_0}{m}$. L'équation sans

son second membre est du type : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$, par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}.$$

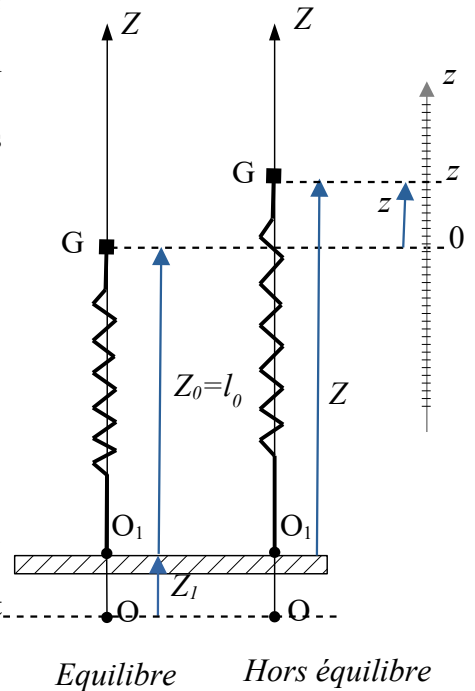
3. A l'équilibre, $\ddot{Z} = 0$ et $\dot{Z} = 0$ ainsi $Z_0 = l_0$. D'après le schéma (ci-contre):

$$z = Z - Z_0 = Z - l_0.$$

4. Pour que la masse retrouve sa position d'équilibre le plus rapidement possible, il

faut être en régime critique ou apériodique c'est à dire $Q \leq \frac{1}{2}$ soit

$$\lambda \geq \lambda_{min} = 2\sqrt{km}.$$



Deuxième étude : Étude simplifiée du boîtier mobile

5. $\vec{OG} = (Z_1 + Z)\vec{u}_z$ d'où $\vec{V}_G = (\dot{Z}_1 + \dot{Z})\vec{u}_z$ d'où $\vec{V}_G = (v_1 + \frac{dZ}{dt})\vec{u}_z$ et $\vec{a}_G = (a_1 + \frac{d^2Z}{dt^2})\vec{u}_z$.

Le bilan des forces suivant $\vec{u}_z$ est inchangé par rapport à la première partie.

- La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(Z - l_0)\vec{u}_z$.
- La force de frottement : $\vec{f} = -\lambda\dot{Z}\vec{u}_z$.

D'après la 2^{ème} loi de Newton appliquée à G : $m(a_1 + \frac{d^2Z}{dt^2})\vec{u}_z = -k(Z - l_0)\vec{u}_z - \lambda\dot{Z}\vec{u}_z$ d'où l'équation sous sa forme

canonique : $\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = \frac{kl_0}{m} - a_1$.

A l'équilibre, $\ddot{Z} = 0$ et $\dot{Z} = 0$ ainsi $Z'_0 = l_0 - \frac{ma_1}{k}$ et $\dot{Z}'_0 = -\frac{ma_1}{k}$. Au bout d'un temps infini, z_0' permet d'accéder à

l'accélération du boîtier, d'où le nom d'accéléromètre.

6. On ajoute au bilan des forces $\vec{F} = \beta V_{out} \vec{u}_z = \beta K z \vec{u}_z$. D'après la question précédente, on en déduit :
 $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{kl_0}{m} - a_1 + \frac{\beta K z}{m}$ or $z = Z - l_0$, ainsi $\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m} \dot{Z} + \frac{k}{m} Z = \frac{kl_0}{m} - a_1 + \frac{\beta K (Z - l_0)}{m}$ d'où :

$$\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m} \dot{Z} + \left(\frac{k}{m} - \frac{\beta K}{m} \right) Z = \frac{kl_0}{m} - a_1 - \frac{\beta K l_0}{m}, \text{ et l'équation en } z : \ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \left(\frac{k}{m} - \frac{\beta K}{m} \right) z = -a_1.$$

A l'équilibre $\ddot{z} = 0$ et $\dot{z} = 0$ ainsi $z_{eq} = -a_1 \frac{m}{(k - \beta K)}$ et $V_{out} = K z_{eq} = -a_1 \frac{mK}{(k - \beta K)}$. Connaissant m , K , k et β , la mesure de V_{out} permet de déterminer l'accélération a_1 .

7. Pour que le régime transitoire dure le moins longtemps possible il faut que le nouveau facteur de qualité soit égal à 0,5. En tenant compte de la force générée par le dispositif électrique :

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - \beta K}{m}} \text{ et } Q' = \frac{m \omega'_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{m(k - \beta K)}}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{m(k - \beta K)}}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ soit } \lambda = 2\sqrt{m(k - \beta K)}.$$

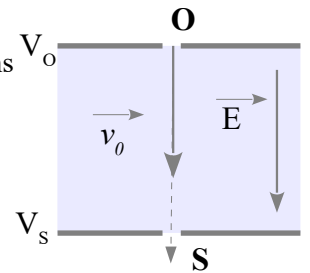
8. En considérant que l'on peut actionner la massette 5 fois par seconde soit une impulsion toutes les 0,2s, le temps de réponse de l'accéléromètre doit être au moins 10 fois inférieur soit 0,02s soit de l'ordre de 10ms.

Correction problème 2 : Détermination de la composition isotopique du chlore

1. $U = V_O - V_S > 0$ car le **champ électrique accélérateur** orienté de O vers S est dans le sens des potentiels décroissants.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ion entre O et S.

$$\frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{\vec{F}_E} O \rightarrow S = q V_O - q V_S = qU \text{ d'où } v_s = \sqrt{2 \frac{qU}{m}} \text{ car } v_0 \ll v_s.$$



2. Dans la chambre de déviation :

2.1. La trajectoire des ions est circulaire.

2.2. La force magnétique est donnée par la relation : $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ en S elle doit être orientée vers le centre de courbure on en déduit que **$\vec{B}$ doit être orienté vers le haut.**

2.3. Pour montrer que le mouvement est uniforme on applique le théorème de la puissance cinétique à la particule dans $\vec{B}$: $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_B \cdot \vec{v} = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. On en déduit que $E_c = \text{cste}$ d'où $\|\vec{v}\| = \text{constante} = v_s$.

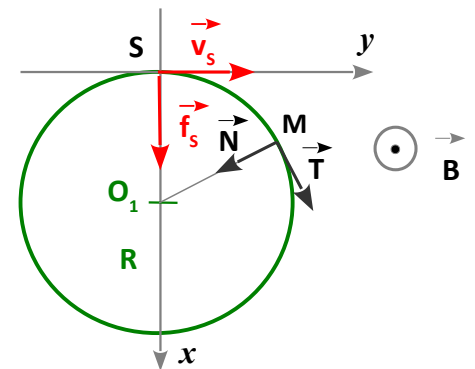
Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse .

2.4. Soit O_1 , le centre de la trajectoire. Dans le référentiel terrestre de repère d'espace $R(O_1, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on exprime la vitesse et l'accélération de la particule dans la base de Frenet **au cours du mouvement**:

$$\vec{v} = v_s \vec{T} \text{ et } \vec{a} = \frac{v_s^2}{R} \vec{N}$$

La force magnétique est : $\vec{F}_b = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q v_s \vec{T} \wedge B \vec{u}_z = q v_s B \vec{N}$

D'après la 2^{ème} loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{F}_B$ d'où $m \frac{v_s^2}{R} = q v_s B$.



On obtient ainsi : $R = \frac{m v_s}{q B}$ en remplaçant v_s par son expression obtenue à la question 1. On obtient :

$$R = \frac{m}{q B} \sqrt{2 \frac{qU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m U}{q}}$$

3. D'après la question précédente, on voit que le rayon de la trajectoire augmente avec la masse donc $R_2 > R_1$. D'où la représentation des 2 trajectoires :

4. $SA_1 = 2R_1$ donc $R_1 = 20\text{cm}$. De la question précédente on tire $B = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{2m_1 U}{q}}$ d'où

$$B = \frac{1}{20 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{2 \times 34,968 \times 1,66054 \cdot 10^{-27} \times 500}{1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ d'où } \boxed{B = 95,3 \text{ mT}}$$

5. D'après la question 2.4. $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ on en déduit : $R_2 = R_1 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ d'où

$$R_2 = 20 \sqrt{\frac{36,965}{34,968}} = 20,56 \text{ cm} \quad \boxed{d = 2(R_2 - R_1) = 2(20,56 - 20,00) = 1,13 \text{ cm}}$$

6. Pour ^{35}Cl , le pourcentage isotopique est $P_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \times 100$ soit :

$$P_1 = \frac{6,667}{6,667 + 2,132} \times 100 = 75,77\% \text{ et } P_2 = \frac{2,132}{6,667 + 2,132} \times 100 = 24,23\% \text{ pour } ^{37}\text{Cl}$$

La masse molaire moyenne du chlore est donc : $\boxed{M = 34,968 \times 0,7577 + 36,965 \times 0,2423 = 35,45 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$

