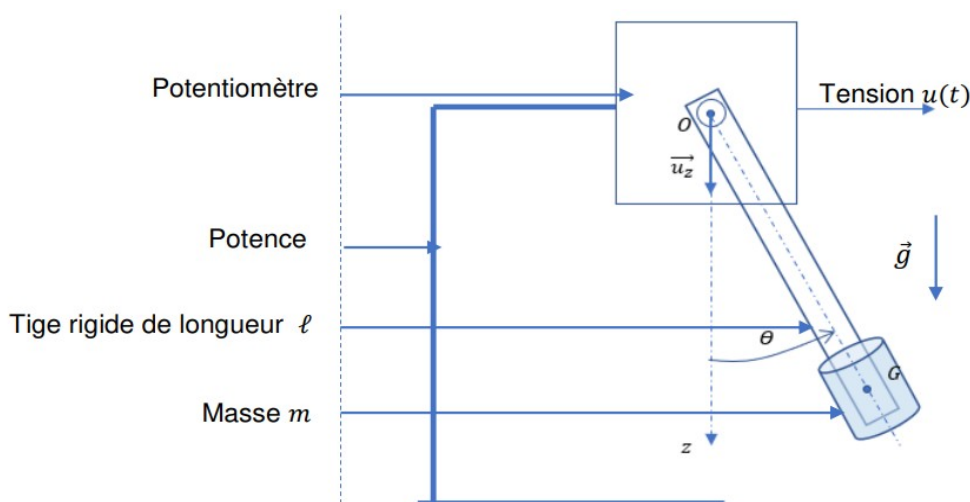


Préparation devoir surveillé n°8 sciences physiques

PROBLÈME 1: Étude des oscillations harmoniques et anharmoniques d'un pendule

Modélisation

On considère le dispositif dessiné ci-dessous permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse fixée à son extrémité. A l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse va osciller autour du point O . La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant. Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire $\theta(t)$ de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec k une constante.



Dans toute la suite, nous allons travailler avec les hypothèses suivantes :

- Le mouvement du pendule est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- Les frottements de type fluide seront négligés.
- On néglige également les effets dissipatifs des actions de contact entre le potentiomètre et la tige.
- On note $\vec{g} = g\vec{u}_z$ le champ de pesanteur terrestre et on néglige la poussée d'Archimède de l'air environnant.
- On néglige la masse de la tige par rapport à la masse m dont le centre de masse G est tel que $OG \approx \ell$.

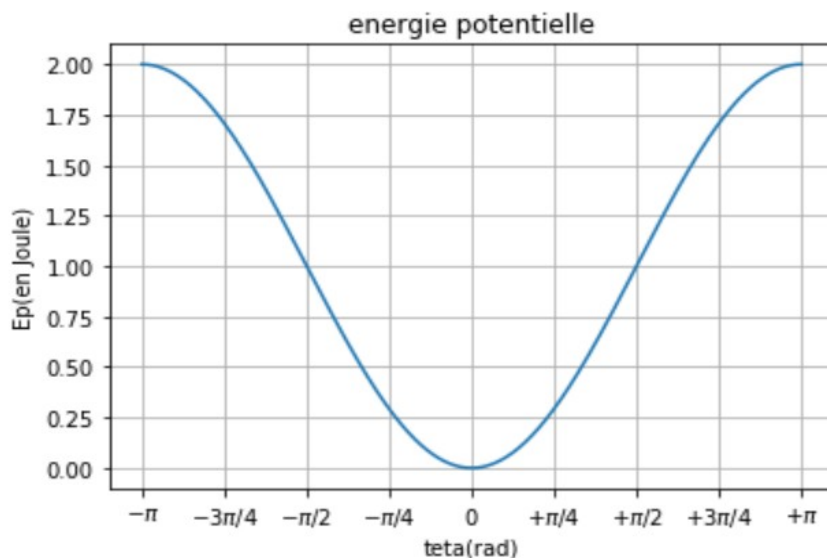
Ce système oscillant est alors modélisé par un pendule simple dont l'étude se limite à celle de la masse

animée d'une vitesse algébrique $v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \ell \dot{\theta}$.

- 1) Établir l'expression de l'énergie cinétique de ce pendule en fonction de m , ℓ et $\dot{\theta}$.
- 2) Établir l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à ce pendule en fonction de m , g , ℓ et θ , en prenant $E_p(\theta=0^\circ)=0$.
- 3) Énoncer le théorème de la puissance mécanique. On nommera les termes intervenant dans ce théorème.
- 4) Montrer alors que l'angle $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$. On donnera l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de g et ℓ .
- 5) Pour cette question uniquement, on se place dans l'approximation harmonique qui impose une faible amplitude angulaire des oscillations (amplitude inférieure à 30°). Dans ces conditions, on accepte le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\sin \theta \approx \theta$.
 - Établir l'expression de $\theta(t)$ en prenant comme conditions initiales : $\theta(t=0) = 0^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$.
 - Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations harmoniques.
 - Représenter l'allure de $\theta(t)$ sur quelques périodes propres T_0 .

Partie expérimentale

On donne ci-dessous la représentation graphique de $E_p(\theta)$ du pendule étudié avec $m = 0,2 \text{ kg}$.



A $t = 0$, on lance la masse avec une vitesse initiale $v(0) = v_0 = \sqrt{10} \text{ m.s}^{-1}$ à la position angulaire $\theta(t=0) = 0^\circ$.

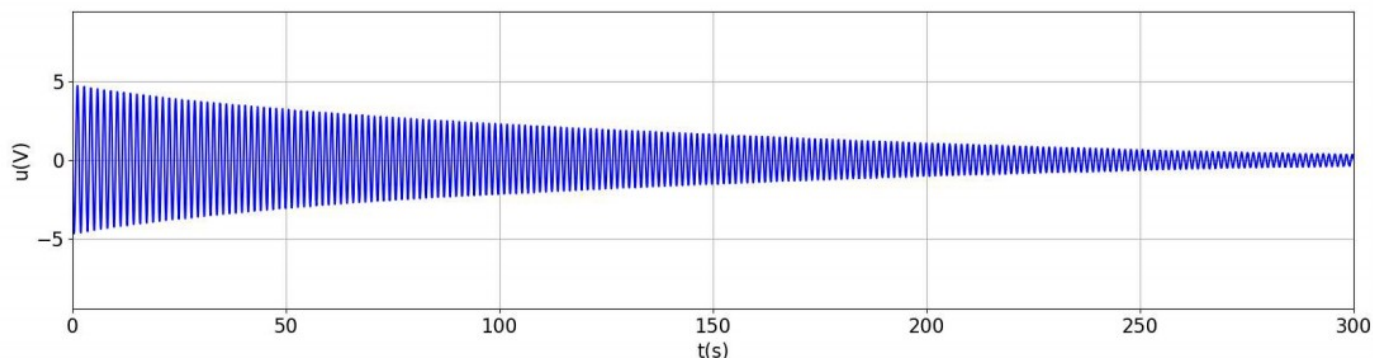
6) Quelle est la valeur de l'énergie mécanique E_m de la masse ? Justifier.

7) Déterminer graphiquement, en expliquant votre démarche, la position angulaire maximale θ_0 (j'ai laissé la notation de l'énoncé mal choisie, $\theta_{\max}$ aurait été plus judicieux) atteinte par cette masse ?

Une fois lancé, le pendule oscille avec une amplitude ne respectant pas toujours l'approximation harmonique. L'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ est alors non linéaire et le pendule n'oscille plus de manière isochrone : sa fréquence d'oscillation dépend de son amplitude maximale d'oscillation θ_0 . En dehors de l'approximation harmonique, on démontre que :

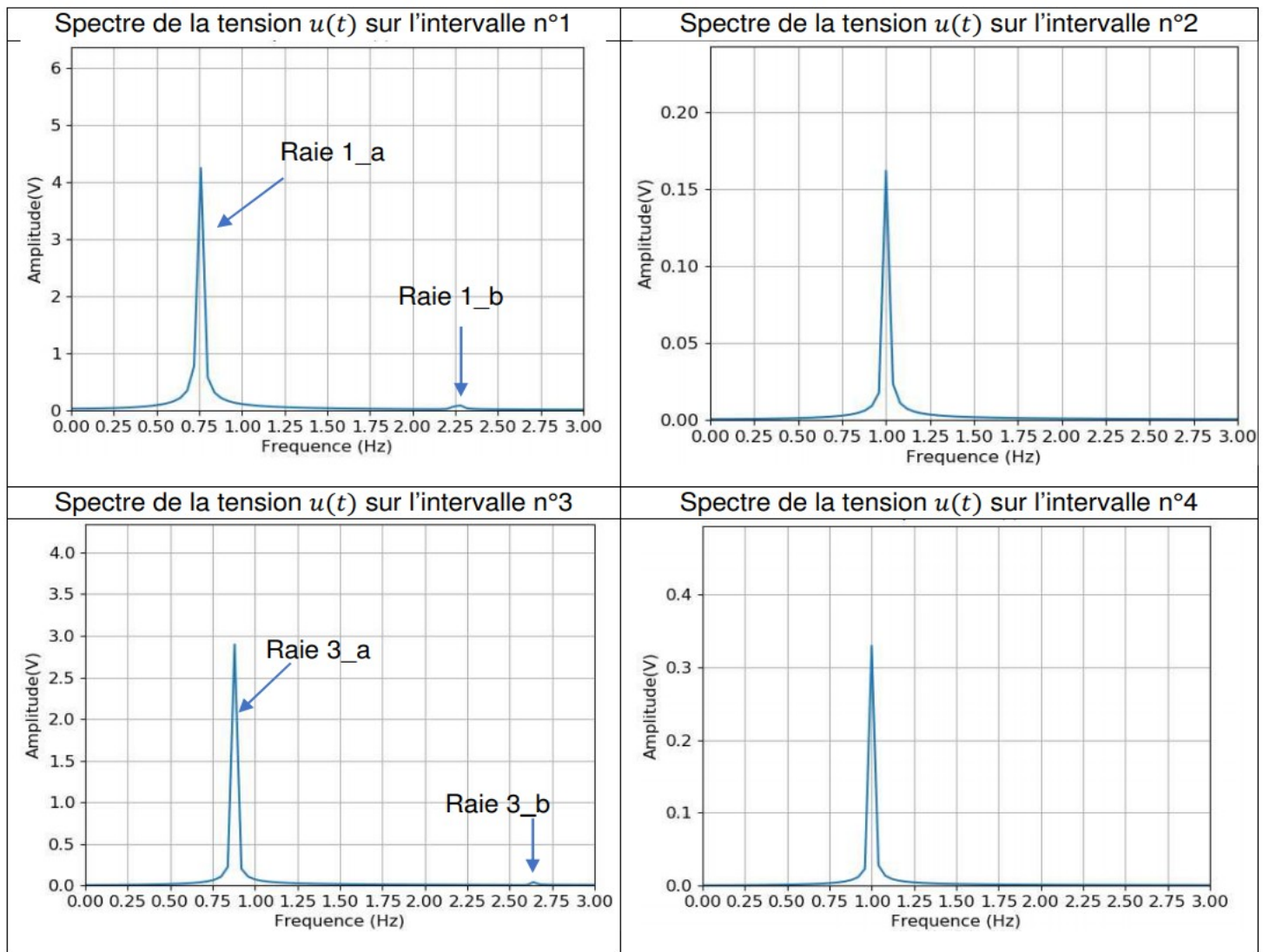
$$\theta(t) = \theta_0 \left(\sin(\omega'_0 t) + \frac{\theta_0^2}{192} \sin(3\omega'_0 t) \right) \text{ avec } T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

On donne ci-après le relevé expérimental de $u(t)$.



L'étude des oscillations pendant 300 s met logiquement en évidence l'influence des frottements. Cependant, en étudiant les oscillations sur des intervalles de temps plus courts de 25 s, on peut, en première approximation, encore négliger l'effet des frottements.

On donne ci-après les spectres obtenus pour quatre intervalles distincts de 25 s chacun, appelés intervalles n°1, n°2, n°3 et n°4 où l'amplitude des oscillations est différente :



- 8) Quel instrument de mesure peut-on utiliser afin d'obtenir le spectre de la tension $u(t)$.
- 9) Sur quel(s) intervalle(s) l'isochronisme des oscillations harmoniques du pendule est-il observable ? Justifier.
- 10) Sur quel(s) intervalle(s) les effets non linéaires des oscillations du pendule sont-ils observables ? Justifier en repérant ces effets non linéaires.
- 11) Donner la valeur de la fréquence propre f_0 du pendule.
- 12) Justifier la valeur de la fréquence associée à la raie 1b.

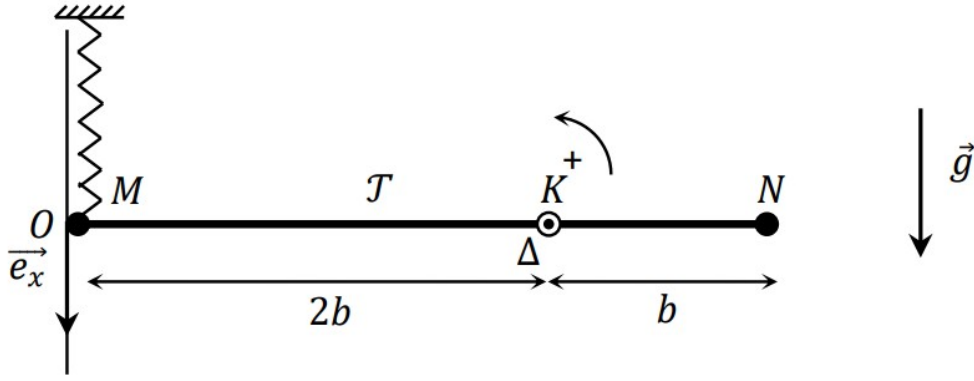
PROBLÈME 2: Oscillations d'une tige rigide (barème sur 30 points)

Une tige homogène T , de masse m , et de longueur $MN = 3b$, est initialement à l'équilibre avec une position horizontale dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_x$ où $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire dirigé dans le sens de la verticale descendante.

On l'astreint à tourner autour d'un axe horizontal ($K \Delta$) fixe dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen) et orthogonal à T et donc au plan de la figure (Fig. ci-après). L'axe de rotation, orienté positivement vers le lecteur, sépare la tige en deux parties de longueurs $MK = 2b$ et $KN = b$.

Les frottements sont négligés. Le moment d'inertie de T par rapport à Δ vaut mb^2 . L'extrémité M (gauche) de la tige est fixée à un ressort vertical, de raideur K et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est solidaire d'un bâti, fixe dans le référentiel du laboratoire. La coordonnée x de M est repérée par l'axe $O\vec{e}_x$. Initialement, M coïncide avec l'origine O du repère, et donc $x(t=0) = 0$.

Après avoir développé son raisonnement, le candidat indiquera la bonne réponse parmi celles proposées dans l'énoncé.



1) Exprimer le moment $M_{\Delta}(\vec{P})$ (scalaire) du poids de la tige par rapport à l'axe orienté $K \Delta$, à l'instant initial :

A) $M_{\Delta}(\vec{P}) = \frac{mgb}{3}$ B) $M_{\Delta}(\vec{P}) = \frac{mgb}{2}$ C) $M_{\Delta}(\vec{P}) = mgb$ D) $M_{\Delta}(\vec{P}) = 2mgb$

2) Exprimer la force $\vec{F}$ qu'exerce le ressort en M à l'instant initial :

A) $\vec{F} = \frac{-m\vec{g}}{4}$ B) $\vec{F} = \frac{-m\vec{g}}{6}$ C) $\vec{F} = \frac{m\vec{g}}{2}$ D) $\vec{F} = \frac{m\vec{g}}{4}$

3) Quelle est la longueur l du ressort à l'instant initial ?

A) $l = l_0 - \frac{mg}{4K}$ B) $l = l_0 + \frac{mg}{3K}$ C) $l = l_0 + \frac{mg}{4K}$ D) $l = l_0 + \frac{mg}{K}$

4) On étudie désormais le régime dynamique au voisinage de la position horizontale de T ($x \ll l_0$). Exprimer le moment scalaire $M_{\Delta}(\vec{F})$ de $\vec{F}$ par rapport à l'axe orienté $K \Delta$:

A) $M_{\Delta}(\vec{F}) = \frac{mgb}{2} - Kbx$ C) $M_{\Delta}(\vec{F}) = \frac{-mgb}{2} - 2Kbx$
 B) $M_{\Delta}(\vec{F}) = \frac{-mgb}{4} - 2Kbx$ D) $M_{\Delta}(\vec{F}) = \frac{-mgb}{2} + 2Kbx$

5) L'équation différentielle d'évolution de l'abscisse $x(t)$ de M se met sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où ω_0 est une constante temporelle. Exprimer ω_0 :

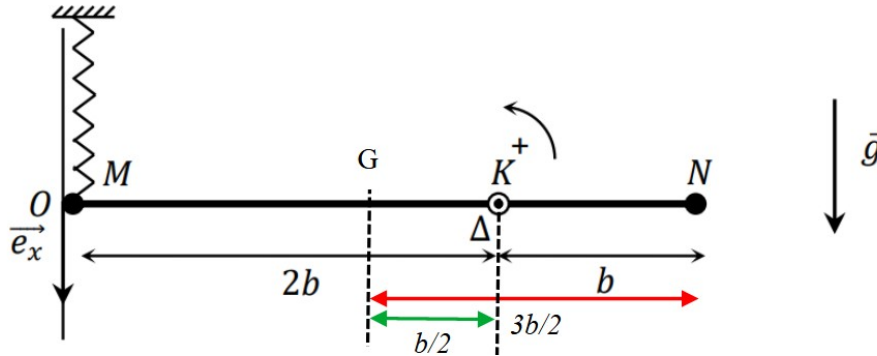
A) $\omega_0 = \sqrt{\frac{4K}{m}}$ B) $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ C) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ D) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{2m}}$

6) Exprimer l'énergie cinétique E_k de T , au voisinage de sa position horizontale :

A) $E_k = m\dot{x}^2$ B) $E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ C) $E_k = \frac{m\dot{x}^2}{4}$ D) $E_k = \frac{m\dot{x}^2}{8}$

Correction devoir surveillé n°6 sciences physiques

Problème 2 : Oscillations d'une tige rigide (d'après ENAC 2024)



- 1) Le poids tend à faire tourner la tige dans le sens positif défini par l'énoncé et G se trouve à une distance $b/2$ de l'axe de rotation ;

il est de plus orthogonal à la tige, on a donc $M_{\Delta}(\vec{P}) = +mg \times \frac{b}{2}$: réponse B.

- 2) D'après le théorème du moment cinétique à l'équilibre appliqué à la barre : $M_{\Delta}(\vec{F}) + M_{\Delta}(\vec{P}) = 0$. On pose F le module de $\vec{F}$. La force $\vec{F}$ fait tourner la barre dans le sens négatif et s'applique à la distance $2b$ de l'axe de rotation d'où

$M_{\Delta}(\vec{F}) = -F \times 2b = \frac{-mgb}{2}$ soit $F = \frac{mg}{4}$, $\vec{F}$ est orientée vers le haut, ce qui correspond à la réponse A.

- 3) Puisque $\vec{F} = -K(l - l_0)\vec{e}_x = \frac{-mg}{4}\vec{e}_x$, on en déduit que $l = \frac{mg}{4K} + l_0$: réponse C.

- 4) Puisque $x \ll l_0$, on peut considérer que $\vec{F}$ est toujours quasiment orthogonale à la tige. La longueur du ressort est $(l+x)$, ainsi la valeur algébrique de $\vec{F}$ est $K(l+x-l_0)$, en reprenant l'expression précédente :

$M_{\Delta}(\vec{F}) = -K\left(\frac{mg}{4K} + x\right) \times 2b = \frac{-mgb}{2} - 2Kbx$: réponse C.

- 5) Le théorème du moment cinétique s'écrit $J_{\Delta}\ddot{\theta} = M_{\Delta}(\vec{F}) + M_{\Delta}(\vec{P})$ avec J_{Δ} le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ et θ l'angle que fait la tige par rapport à l'horizontale, orienté dans le sens positif de l'énoncé. En remplaçant les moments des forces on trouve $mb^2\ddot{\theta} = \frac{-mgb}{2} - 2Kbx + \frac{mgb}{2} = -2Kbx$. Puisque $\theta \approx \frac{x}{2b}$ on en déduit que $\frac{mb^2}{2b}\ddot{x} + 2Kbx = 0$ qu'on

peut mettre sous la forme proposée $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{4K}{m}}$: réponse A.

- 6) Par définition de l'énergie cinétique d'un solide en rotation, $E_k = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 \approx \frac{1}{2}mb^2\frac{\dot{x}^2}{4b^2} = \frac{m\dot{x}^2}{8}$: réponse D.

Problème 3 : Étude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre (D'après ATS 2014)

Préliminaires :

1) $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

2) On sait que : $F(r) = \frac{-dE_p(r)}{dr} = \frac{-d\left(-mg_0 \frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; D'où $\vec{F} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;

C'est donc **une force attractive**.

3) $\vec{L}_0$ est **le vecteur moment cinétique du point M par rapport à O**.

$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)$; Ainsi : $\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{k}$;

Donc : $L_0 = \|\vec{L}_0\| = m r^2 |\dot{\theta}|$;

Système : le satellite en M ;

Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

Seule force $\vec{F}$; Son moment par rapport à O : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, car vecteurs colinéaires.

Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$; d'où $\vec{L}_0 = \text{cst}$;

Mise en orbite circulaire du satellite :

4) Trajectoire circulaire de rayon r , donc $\dot{r} = 0$; Alors $\vec{v}_M = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Ou encore : $\vec{v}_M = v \vec{u}_\theta$.

Et $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - v \dot{\theta} \vec{u}_r$; ou encore : $\vec{a}_M = \frac{-v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta$.

5) Seule force $\vec{F} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$; 2^{ème} loi de Newton : $\vec{F} = m \vec{a}_M$; Ainsi : $m \left(\frac{-v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta \right) = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;

en projetant sur les 2 axes, il vient : $\dot{v} = 0$; Ainsi : $v = \text{cste}$. Le mouvement est donc uniforme. $\frac{v^2}{r} = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; Soit : $v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

6) $E_C = \frac{1}{2} m v^2$; ainsi : $E_C = \frac{m g_0 R_T^2}{2r}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m g_0 R_T^2}{2r} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$; ainsi : $E_m = \frac{-m g_0 R_T^2}{2r} < 0$ le signe négatif est normal car **c'est un état lié**.

7) $E_m(r_b) = \frac{-4.10^3 \times 10 \times (6,4.10^6)^2}{2 \times 8.10^6}$; on trouve : $E_m(r_b) \approx -1.10^{11} \text{ J}$.

Et $E_m(r_h) = \frac{-4.10^3 \times 10 \times (6,4.10^6)^2}{2 \times 40.10^6}$; on trouve : $E_m(r_h) \approx -2.10^{10} \text{ J}$.

Étude énergétique du satellite :

8) Le système n'est soumis qu'à une force conservative, donc son E_m est constante.

De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Donc : $v_M^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$.

D'où : $E_m = \frac{1}{2} m v_M^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$; de plus, on a vu au 3) que : $L_0 = \|\vec{L}_0\| = m r^2 |\dot{\theta}|$; donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$ et

$m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m r^2}$. Ainsi : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. CQFT.

9) On a : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$. Donc à chaque instant, on doit avoir : $E_m \geq E_{P,eff}(r)$;

10) a) Pour la trajectoire elliptique, il faut un domaine de variation de r qui soit borné, donc il faut un état lié,

$$E_m = E_{m2} \geq E_{P,eff}(r) \text{ impose } r_{min} \leq r \leq r_{max};$$

Pour la trajectoire hyperbolique, il faut un domaine de variation de r qui soit non borné, donc il faut un état de diffusion,

$$E_m = E_{m1} \geq E_{P,eff}(r) \text{ impose } r \geq r'_{min};$$

b) Pour la trajectoire circulaire, il faut que r soit constant, donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur.

$$E_m = E_{min} \geq E_{P,eff}(r) \text{ impose } r = \text{cste.}$$

Mise en orbite haute du satellite :

11) En A ou en P, $\vec{OA} \perp \vec{v}_A$, donc la composante en $\vec{u}_r$ est nulle, ainsi $\dot{r} = 0$;

Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$;

D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $r_h + r_b = 2a$;

$$12) \text{ D'après la question 8), on sait que } E_{mt} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r};$$

$$\text{or en A et en P, } \dot{r} = 0, \text{ donc en ces points } E_{mt} = 0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r};$$

$$\text{D'où : } r^2 + \frac{g_0 m r R_T^2}{E_{mt}} - \frac{L_0^2}{2m E_{mt}} = 0; \text{ par identification, il vient : } \alpha = \frac{g_0 m R_T^2}{E_{mt}} \text{ et } \beta = \frac{-L_0^2}{2m E_{mt}};$$

$$13) \text{ On a } r^2 + \alpha r + \beta = 0; \Delta = \alpha^2 - 4\beta; r_{h,b} = \frac{-\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}; \text{ ainsi : } r_h + r_b = 2a = -\alpha;$$

$$\text{d'où : } 2a = \frac{-g_0 m R_T^2}{E_m} \text{ et } E_{mt} = \frac{-m g_0 R_T^2}{2a}; \text{ CQFT.}$$

14) Au début du transfert, le satellite est en $r_b = 8000$ km sur l'ellipse de transfert.

Par lecture graphique, on obtient $E_{peff} = E_{m,ellipse} \approx -30 \text{ GJ}$ (courbe du milieu)

15) De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : $E_{m,b} \approx -100 \text{ GJ}$ (courbe du bas).

Et pour l'orbite haute : $E_{m,h} \approx -20 \text{ GJ}$ (courbe du haut).

Rq.: On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

16) En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : ($E_{m,b} \approx -100 \text{ GJ}$) à l'ellipse de transfert

($E_{m,ellipse} \approx -35 \text{ GJ}$), il faut donc lui fournir $\Delta E_{m,p} \approx 70 \text{ GJ}$.

$$\text{Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit } m_c = \frac{70 \cdot 10^9}{50 \cdot 10^6} = \frac{70000}{50}; \text{ Soit : } m_c = 1400 \text{ kg}.$$

17) Les ergols utilisés dans la fusée Ariane sont l'oxygène et l'hydrogène liquide.

L'orbite géostationnaire est l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km

d'altitude. Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparaît alors immobile pour l'observateur terrestre.

Chute du satellite :

18) L'énoncé nous donne la solution des questions 5) et 6) pour v^2 et E_m .

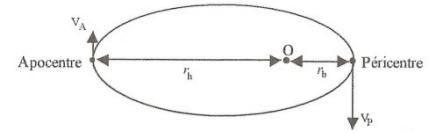
Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question 5) que le mouvement était uniforme.

$$\text{Alors } v = \frac{\text{dist}}{\text{temps}} = \frac{2\pi r}{T} \text{ (pour un tour); Soit : } v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0 \frac{R_T^2}{r}, \text{ d'après l'énoncé.}$$

$$\text{Donc : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}; \text{ On retrouve la 3}^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler.}$$

19) Théorème de l'énergie mécanique : Pour un système non conservatif (ce qui est le cas ici), car il y a des frottements,

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}; \text{ Ainsi ici, } \frac{dE_m}{dt} = -k v^2 = -k g_0 \frac{R_T^2}{r};$$



Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = \frac{-m g_0 R_T^2}{2r(t)}$; Donc $\frac{dE_m}{dt} = \frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r}$

Ainsi : $\frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r} = -k g_0 \frac{R_T^2}{r}$; D'où : $\dot{r} + \frac{2k}{m} r(t) = 0$; Par identification, on a $\tau = \frac{m}{2k}$;

Unité de τ : $[\tau] = \frac{kg}{[k]} = \frac{kg}{N.s.m^{-1}} = \frac{kg}{kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}} = s$; τ **est bien homogène à un temps.**

Car $\vec{f} = -k \vec{v}$.

20) Solution de l'EDL 1 : $r(t) = A e^{-t/\tau}$; Or $r(0) = r_0 = A$;

Donc : $r(t) = r_0 e^{-t/\tau}$;

21) En toute rigueur, $r > R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de k n'est pas constante : $k(r)$.

En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.

