

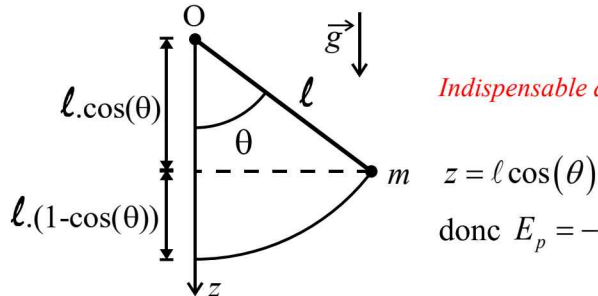
I – Étude des oscillations harmoniques et anharmoniques d'un pendule

a) Modélisation

1) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$ donc $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

2) L'axe des z est vertical descendant donc $E_p = \boxed{-}mgz + Cte$

Attention au signe



Indispensable de faire un schéma en mécanique

$z = \ell \cos(\theta)$
donc $E_p = -mg\ell \cos(\theta) + Cte$

L'énoncé précise que $E_p(\theta = 0) = 0$

$\Rightarrow 0 = -mg\ell \cos(0) + Cte \Rightarrow Cte = m.g.\ell$

On en déduit que $E_p = mg\ell(1 - \cos(\theta))$

Le choix de la référence d'énergie potentielle et donc de la valeur de la constante est arbitraire et n'influe jamais sur la nature du mouvement.

3) Théorème de la puissance mécanique pour un point matériel en référentiel galiléen $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P^{nc}}$

E_m énergie mécanique et P^{nc} puissance des forces non conservatives.

4) Par définition, $E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2(t) - mg\ell \cos(\theta(t)) + Cte$ Bien voir les fonctions à dériver

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\ell^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) - mg\ell(-\sin(\theta)\dot{\theta}) = m\ell^2\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta)\right)\dot{\theta}$ $(u^2)' = 2uu'$ $(\cos(u))' = -\sin(u)u'$

En négligeant tout frottement, le système est conservatif : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

soit $\dot{\theta} = 0$ à tout instant. Cette solution n'est pas celle recherchée

soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$ à tout instant. Attention, ce n'est pas l'équation harmonique

On l'identifie à $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ Peut-on parler de pulsation propre ?

5) $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin(\theta) \approx \theta$ Attention, ceci est vrai en radians

L'équation différentielle devient alors la célèbre équation harmonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ donc la solution

est $\theta(t) = K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t)$ $\theta(0) = K_1$

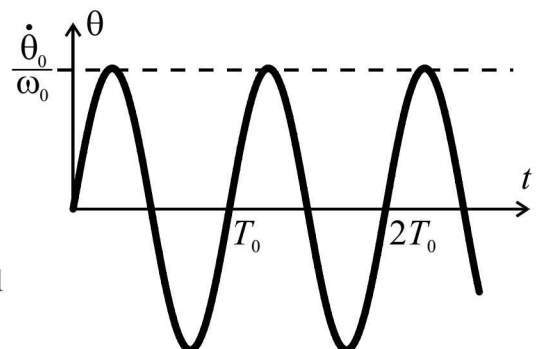
$\dot{\theta}(t) = -K_1\omega_0 \sin(\omega_0 t) + K_2\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ $\dot{\theta}(0) = K_2\omega_0$

L'énoncé dit que $\theta(0) = 0$ donc $K_1 = 0$ Les Constantes d'Intégrations se calculent grâce aux Conditions Initiales

$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ donc $K_2\omega_0 = \dot{\theta}_0$

$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



b) Partie expérimentale

6) Rappelons que le système est conservatif donc $E_m = Cte$

On peut obtenir sa valeur à l'instant initial : $E_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell(1 - \cos(\theta_0))$

AN : $E_m = \frac{1}{2} \times 0,2 \times (\sqrt{10})^2 + mg\ell(1 - \cos(0))$ soit $E_m = 1 \text{ J}$

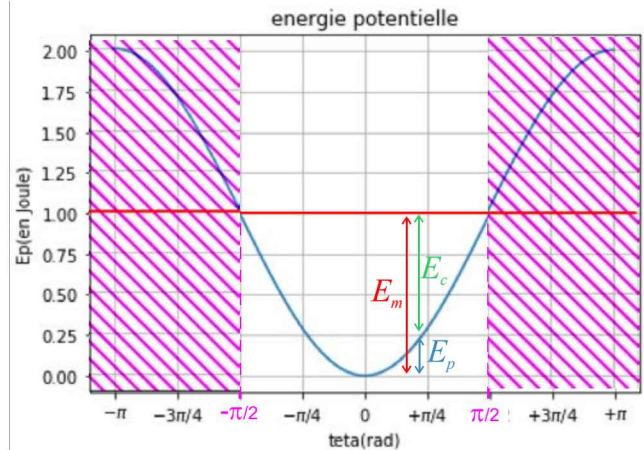
7) $E_m = E_c(v) + E_p(\theta)$ et $E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ donc

$$E_p(\theta) \leq E_m$$

L'oscillateur est bloqué dans une cuvette d'énergie potentielle et ne peut pas dépasser la barrière d'énergie mécanique. On lit

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Attention à ne pas confondre l'amplitude θ_0 avec une position initiale $\theta(0)$; la notation est mal choisie...



8) On doit disposer d'un analyseur de spectre.

- celui-ci peut être intégré dans un oscilloscope numérique avec FFT
- ou acquisition sur l'ordinateur grâce à un CAN + logiciel de traitement (*Regressi, Latispro...*)

9) Isochronisme : La période d'un oscillateur est indépendante de l'amplitude.

L'énoncé précise que $T'_0 \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$ donc la période T'_0 dépend de l'amplitude θ_0 .

Cependant, dans le cadre de faibles amplitudes, $\theta_0 \ll 1$ et $T'_0 \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$ indépendant de θ_0 .

Ici, $u(t) = k\theta(t)$ donc il y aura isochronisme approché pour les faibles amplitudes en volts.

Les intervalles n°2 et n°4 correspondent à des mesures dix fois plus faibles ($< 0,3 \text{ V}$) que les intervalles n°1 et n°3 ($> 3 \text{ V}$). Ce sont donc des bons candidats pour y observer l'isochronisme approché.

Entre l'intervalle n°2 et n°4, l'amplitude est doublée et la fréquence observée n'évolue pas. C'est caractéristique de l'isochronisme approché.

10) Le pendule est un oscillateur linéaire s'il peut être modélisé par une équation différentielle harmonique. Il est alors caractérisé par la présence d'une fréquence unique dans son spectre.

La présence d'harmoniques dans le spectre est caractéristique des effets non linéaires et cela est observable sur les intervalles n°1 et n°3.

11) La fréquence propre du pendule $f_0 = \frac{1}{T_0}$ est observable pour de faibles amplitudes : $f_0 = 1 \text{ Hz}$.

12) D'après l'énoncé, lorsque les effets non linéaires sont visibles, on doit observer un harmonique 3 de fréquence $f_3 = 3f'_0$. Sur le spectre de l'intervalle n°1, on lit le fondamental à $f'_0 = 0,75 \text{ Hz}$ (raie 1_a) et

l'harmonique 3 $f_3 = 3f'_0 = 2,25 \text{ Hz}$ (raie 1_b). *L'amplitude de l'harmonique 3 est très faible : $\theta_3 = \frac{\theta_1^3}{192}$*