

Préparation devoir surveillé n°8 sciences physiques

Étude d'un satellite de télédétection terrestre

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet le mouvement d'un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

Le satellite est assimilé à un point matériel M, la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $R_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindropolaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure 2.

Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$.

Déterminer l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ et du vecteur vitesse $\vec{v}_M$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle s'exprime sous la forme :

$$E_p(r) = -g_0 m \left(\frac{R_T^2}{r} \right). \text{ En déduire l'expression de la force } \vec{F} = F(r) \vec{u}_r \text{ exercée par la Terre}$$

sur le satellite en fonction de g_0, m, R_T et r . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\vec{F}$.

3) Soit $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ?

Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de $r, \dot{\theta}$ et m .

Montrer que le vecteur $\vec{L}_0$ est constant au cours du mouvement.

Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- **Phase balistique** : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- **Phase de satellisation** : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r \dot{\theta}$ de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de r .

5) À l'aide de la 2^{ème} loi de Newton, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et r .

6) En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, g_0, R_T et r . Justifier le signe de E_m .

7) **Application numérique** : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.

Étude énergétique du satellite

8) On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et

$$\text{qu'elle se met sous la forme : } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}.$$

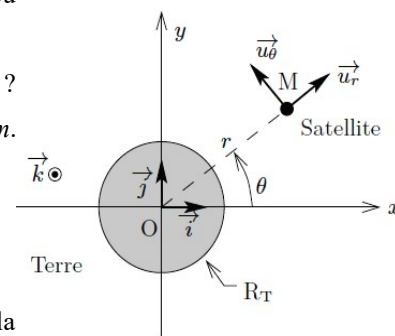
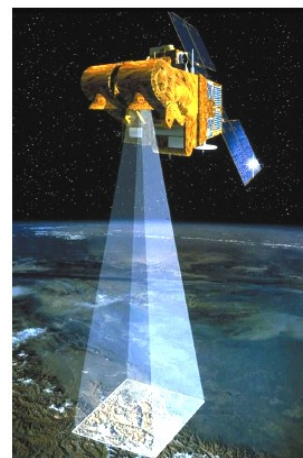


Figure 2

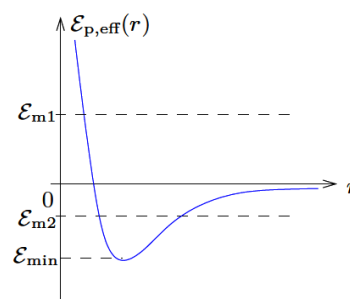


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

9) On appelle énergie potentielle effective : $E_{p,eff}(r) = E_m - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$. Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $E_{p,eff}(r) \leq E_m$. Expliquer ce résultat.

10) Le graphe de $E_{p,eff}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

a) À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ? Justifier.

b) Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier.

Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8,0.10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40.10^3$ km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite en A et en P à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

11) Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?

12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique E_{mt} sur l'orbite elliptique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m , L_0 , E_{mt} , g_0 et R_T .

13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $E_{mt} = -\frac{g_0 m R_T^2}{2a}$.

14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique E_{mt} du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase **le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié**. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0.10^3$ km.

De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40.10^3$ km.

16) En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mp} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg⁻¹, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle-t-on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

Chute du satellite

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -k \vec{v}$. Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique $E_m(t) = -\frac{g_0 m R_T^2}{2r(t)}$ et de la vitesse $v^2(t) = \frac{g_0 R_T^2}{r(t)}$ restent valables.

18) À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r . Quelle est le nom de la relation obtenue ?

19) À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon $r(t)$ est solution de l'équation différentielle : $\frac{dr}{dt} + \frac{r(t)}{\tau} = 0$, où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m . Montrer que τ est bien homogène à un temps.

20) En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0 .

21) Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ et on négligera R_T devant r_0 .

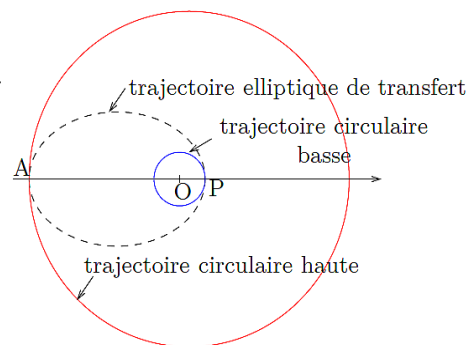


Figure 4

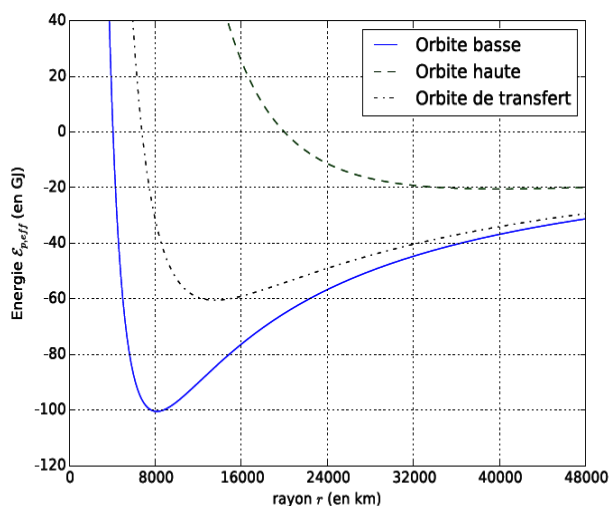


Figure 5 - $E_{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

Correction

Étude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre (D'après ATS 2014)

Préliminaires :

1) $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

2) On sait que : $F(r) = \frac{-dE_p(r)}{dr} = \frac{-d\left(-mg_0 \frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; D'où $\vec{F} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;

C'est donc **une force attractive**.

3) $\vec{L}_0$ est le **vecteur moment cinétique du point M par rapport à O**.

$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)$; Ainsi : $\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{k}$;

Donc : $L_0 = \|\vec{L}_0\| = m r^2 |\dot{\theta}|$;

Système : le satellite en M ;

Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

Seule force $\vec{F}$; Son moment par rapport à O : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, car vecteurs colinéaires.

Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$; d'où $\vec{L}_0 = \text{cste}$;

Mise en orbite circulaire du satellite :

4) Trajectoire circulaire de rayon r , donc $\dot{r} = 0$; Alors $\vec{v}_M = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Ou encore : $\vec{v}_M = v \vec{u}_\theta$.

Et $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - v \dot{\theta} \vec{u}_r$; ou encore : $\vec{a}_M = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta$.

5) Seule force $\vec{F} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$; 2^{ème} loi de Newton : $\vec{F} = m \vec{a}_M$; Ainsi : $m \left(-\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta \right) = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;

en projetant sur les 2 axes, il vient : $\dot{v} = 0$; Ainsi : $v = \text{cste}$. Le mouvement est donc uniforme. $\frac{v^2}{r} = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; Soit : $v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

6) $E_C = \frac{1}{2} m v^2$; ainsi : $E_C = \frac{m g_0 R_T^2}{2 r}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m g_0 R_T^2}{2 r} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$; ainsi : $E_m = -\frac{m g_0 R_T^2}{2 r} < 0$ le signe négatif est normal car **c'est un état lié**.

7) $E_m(r_b) = \frac{-4.10^3 \times 10 \times (6,4.10^6)^2}{2 \times 8.10^6}$; on trouve : $E_m(r_b) \approx -1.10^{11} \text{ J}$.

Et $E_m(r_h) = \frac{-4.10^3 \times 10 \times (6,4.10^6)^2}{2 \times 40.10^6}$; on trouve : $E_m(r_h) \approx -2.10^{10} \text{ J}$.

Étude énergétique du satellite :

8) Le système n'est soumis qu'à une force conservative, donc son E_m est constante.

De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Donc : $v_M^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$.

D'où : $E_m = \frac{1}{2} m v_M^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$; de plus, on a vu au 3) que : $L_0 = \|\vec{L}_0\| = m r^2 |\dot{\theta}|$; donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$ et

$$m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m r^2} . \text{ Ainsi : } \mathbf{E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}} . \text{ CQFT.}$$

9) On a : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$. Donc à chaque instant, on doit avoir : $E_m \geq E_{P,eff}(r)$;

10) a) Pour la trajectoire elliptique, il faut un domaine de variation de r qui soit borné, donc il faut un état lié,

$$E_m = E_{m2} \geq E_{P,eff}(r) \text{ impose } r_{min} \leq r \leq r_{max} ;$$

Pour la trajectoire hyperbolique, il faut un domaine de variation de r qui soit non borné, donc il faut un état de diffusion,

$$E_m = E_{m1} \geq E_{P,eff}(r) \text{ impose } r \geq r'_{min} ;$$

b) Pour la trajectoire circulaire, il faut que r soit constant, donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur.

$$E_m = E_{min} \geq E_{P,eff}(r) \text{ impose } r = \text{cste.}$$

Mise en orbite haute du satellite :

11) En A ou en P, $\vec{OA} \perp \vec{V}_A$, donc la composante en $\vec{u}_r$ est nulle, ainsi $\dot{r} = 0$;

Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$;

D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $\mathbf{r_h + r_b = 2a}$;

$$12) \text{ D'après la question 8), on sait que } E_{mt} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r} ;$$

$$\text{or en A et en P, } \dot{r} = 0, \text{ donc en ces points } E_{mt} = 0 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r} ;$$

$$\text{D'où : } r^2 + \frac{g_0 m r R_T^2}{E_{mt}} - \frac{L_0^2}{2 m E_{mt}} = 0 ; \text{ par identification, il vient : } \mathbf{\alpha = \frac{g_0 m R_T^2}{E_{mt}}} \text{ et } \mathbf{\beta = \frac{-L_0^2}{2 m E_{mt}}} ;$$

$$13) \text{ On a } r^2 + \alpha r + \beta = 0 ; \Delta = \alpha^2 - 4\beta ; r_{h,b} = \frac{-\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} ; \text{ ainsi : } r_h + r_b = 2a = -\alpha ;$$

$$\text{d'où : } 2a = \frac{-g_0 m R_T^2}{E_m} \text{ et } E_{mt} = \frac{-m g_0 R_T^2}{2a} ; \text{ CQFT.}$$

14) Au début du transfert, le satellite est en $r_b = 8000$ km sur l'ellipse de transfert.

Par lecture graphique, on obtient $\mathbf{E_{peff} = E_{m,ellipse} \approx -30 \text{ GJ}}$ (courbe du milieu)

15) De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : $\mathbf{E_{m,b} \approx -100 \text{ GJ}}$ (courbe du bas).

Et pour l'orbite haute : $\mathbf{E_{m,h} \approx -20 \text{ GJ}}$ (courbe du haut).

Rq : On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

16) En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : ($E_{m,b} \approx -100 \text{ GJ}$) à l'ellipse de transfert

($E_{m,ellipse} \approx -35 \text{ GJ}$), il faut donc lui fournir $\mathbf{\Delta E_{m,P} \approx 70 \text{ GJ}}$.

$$\text{Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit } m_C = \frac{70 \cdot 10^9}{50 \cdot 10^6} = \frac{70000}{50} ; \text{ Soit : } \mathbf{m_C = 1400 \text{ kg}} .$$

17) Les ergols utilisés dans la fusée Ariane sont **l'oxygène et l'hydrogène liquide**.

L'orbite géostationnaire **est l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km**

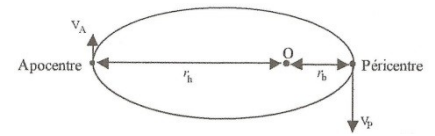
d'altitude. Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparaît alors immobile pour l'observateur terrestre.

Chute du satellite :

18) L'énoncé nous donne la solution des questions 5) et 6) pour v^2 et E_m .

Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question 5) que le mouvement était uniforme.

$$\text{Alors } v = \frac{\text{dist}}{\text{temps}} = \frac{2\pi r}{T} \text{ (pour un tour)} ; \text{ Soit : } v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0 \frac{R_T^2}{r}, \text{ d'après l'énoncé.}$$



Donc : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$; On retrouve la 3^{ème} loi de Kepler.

19) Théorème de l'énergie mécanique : Pour un système non conservatif (ce qui est le cas ici), car il y a des frottements,

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}; \text{ Ainsi ici, } \frac{dE_m}{dt} = -k v^2 = -k g_0 \frac{R_T^2}{r};$$

Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = \frac{-m g_0 R_T^2}{2r(t)}$; Donc $\frac{dE_m}{dt} = \frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r}$

Ainsi : $\frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r} = -k g_0 \frac{R_T^2}{r}$; D'où : $\dot{r} + \frac{2k}{m} r(t) = 0$; Par identification, on a $\tau = \frac{m}{2k}$;

Unité de τ : $[\tau] = \frac{kg}{[k]} = \frac{kg}{N \cdot s \cdot m^{-1}} = \frac{kg}{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot s \cdot m^{-1}} = s$; τ **est bien homogène à un temps.**

Car $\vec{f} = -k \vec{v}$.

20) Solution de l'EDL 1 : $r(t) = A e^{-t/\tau}$; Or $r(0) = r_0 = A$;

Donc : $r(t) = r_0 e^{-t/\tau}$;

21) En toute rigueur, $r > R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de k n'est pas constante : $k(r)$.

En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.

