Durée : 3h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Problème 1 *Polynômes*

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

   On pourra utiliser le théorème de Rolle.

5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

   Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

   En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Etude de l'endomorphisme φ

7. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 8 à 12, n désigne un entier naturel.

8. Justifier que $\varphi(\mathbb{R}_n[X])$ est contenu dans $\mathbb{R}_n[X]$.

On note alors φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) = \varphi(P)$, appelé endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

9. On note $M = (m_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.
10. Vérifier que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
11. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 10, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.
12. Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme L_k vérifie la relation $\varphi(L_k) = k(k+1)\ L_k$.
    On pourra utiliser la question 11.
13. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}_n'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de φ_n est diagonale.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

14. Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

15. Etablir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\varphi(P),Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\varphi(P),Q\rangle = \langle P,\varphi(Q)\rangle.$$

16. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *On pourra utiliser la question 12.*
17. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P, L_n\rangle = 0$.
18. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P,\mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P-Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\mathrm{d}(P,\mathbb{R}_n[X]) = \|P-T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$\mathrm{d}(P,\mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2,\ \text{où } c_k(P) = \langle P,Q_k\rangle.$$

20. Prouver que la série $\sum(c_k(P))^2$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

Partie IV - Expression intégrale

Pour $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n du$. Dans les question 21 et 22, a désigne un réel strictement positif.

21. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = 0$. *On pourra utiliser un changement de variable défini par $v = \pi - u$.*
22. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{du}{1+a^2\cos^2 u} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. *On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \arctan v$.*
23. En déduire que :
$$\forall t \in]-1,1[, \forall \theta \in [0,\pi], \quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}.$$

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

Dans les question 24 à 32, n désigne un entier naturel non nul.

24. Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \cdots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in [\![1,2n]\!], h(t_i) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $h^{(2n-1)}(c) = 0$.
25. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par :
$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\ell_i(P) = P(x_i)$
(on rappelle que $x_1,\ldots,x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes). Montrer que $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})$.
26. En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\beta_k\ell_k$.
27. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de réels tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1}P(t)\mathrm{d}t = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$
28. Montrer que la relation de la question 27 reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. *On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, utiliser la division euclidienne de P par L_n et la question 17.*

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

29. Montrer que : $\exists! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H_n'(x_i) = f'(x_i)\end{cases}$. *On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui à P associe : $(P(x_1),\ldots,P(x_n),P'(x_1),\ldots,P'(x_n))$.*

On rappelle que A_n a été défini à la question 6.

30. Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x \neq x_i$.
Montrer que : $\exists c \in [-1,1]$, $f(x) - H_n(x) = \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c)$. *On pourra utiliser l'application g définie sur $[-1,1]$ par $g(t) = f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!}K$, où K est un réel dépendant de x à préciser, et appliquer le résultat de la question 24 à la fonction g'.*
31. Montrer que : $\forall y \in [-1,1]$, $\exists c \in [-1,1]$, $f(y) - H_n(y) = \dfrac{A_n(y)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c)$.
32. Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \displaystyle\max_{t\in[-1,1]}|f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :
$$\left|\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n))\right| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}A_n(t)^2\mathrm{d}t.$$
33. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_{-1}^{1}A_n(t)^2\mathrm{d}t$.