Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1 *(durée maximale conseillée 1h40)*

1. (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   (b) En déduire que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   Le but de l'exercice est de calculer la valeur de I.

2. (a) Montrer que :
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \ln(1+x) \leq x.$$

   (b) i. En déduire que :$\forall n \in \mathbb{N}^*$,$\forall t \in [0,\sqrt{n}]$, $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2}$.

   ii. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}^*$,$\forall t \in [0,\sqrt{n}]$, $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(I_n)_{n\geq 1}$ par :
$\forall n \geq 1, u_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t,\ I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n\geq 1}$ par :
$\forall n \geq 1, v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$
On notera que l'intervalle d'intégration des suites $(v_n)n \geq 1$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(I_n)_{n\geq 1}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, justifier la convergence de l'intégrale généralisée v_n.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n$.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n \leq v_n$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$. On admet le résultat : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

   (a) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n} \times \sin x$, exprimer u_n en fonctionde a_{2n+1}.

   (b) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n} \times \tan x$, montrer que : $\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{n} \times a_{2n-2}$.

   Indication : on rappelle la relation $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$.

   (c) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 *(durée maximale conseillée 20 min)*

1. Justifier la convergence et calculer la valeur C de l'intégrale généralisée :

$$C = \int_0^{+\infty} 2t\ \mathrm{e}^{(\mathbf{i}-1)t^2} \mathrm{d}t$$

2. En déduire la convergence et la valeur de $S = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2t \sin(t^2)\ \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$

Exercice 3 *(durée maximale conseillée 1h)*

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\ \mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

N.B. c'est à dire qu'à $x > 0$ fixé, les expressions de $F(x)$, $H(x)$ et $G(x)$ sont bien des expressions d'intégrales généralisées convergentes.

Q3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Q4. [Pour les 5/2 seuls]
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.
[les 3/2] admettez le résultat et la relation $F' = -G$

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H.

On pourra calculer $H(x) + i\ G(x)$.

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\ \mathrm{d}t$.

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Exercice 4 *Plus difficile (durée maximale conseillée 2h)*

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.

   1.1. Montrer que l'on a, lorsque t tend vers l'infini :
   $$\lambda - f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \lambda - 1 + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$
   N.B. on dit que l'on a un développement asymptotique.

   1.2. En déduire un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

   1.3. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

   1.4. Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

2. **On revient au cas général** pour f

   On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\mathrm{d}t$.

   3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

   3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).

   4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ est constante.

   Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

   4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

   4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

   4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\mathrm{d}t$.

   5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

   5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

   5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

   5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

   i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 4.

   ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.