Les calculatrices sont **interdites**

Durée : 2h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Tout résultat doit être souligné

N.B. : si vous admettez un résultat ou une formule, dites-le clairement sur votre copie.

Questions de cours (commun)

1. Un intervalle réel est-il nécessairement un segment ? Si non donner un contre-exemple.
2. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle réel I est-elle toujours dérivable ? Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{12}-x+1$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire le tableau de variations de f.
2. (a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0,+\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0,2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2,+\infty[$. On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[0,+\infty[$ avec $\beta<\gamma$.
   (b) Simplifier l'expression $1+\dfrac{\beta^3}{12}$ *(on l'exprimera le résultat à l'aide de β).*
   (c) Justifier que $\beta\geq 1$.
   On admettra pour la suite que β appartient à $[1\ ;\ 1,2]$ et que γ appartient à $[2,7\ ;\ 2,8]$.
   (d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,+\infty[$.
4. On cherche à approcher β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=1+\dfrac{u_n^3}{12}\end{cases}$
   (a) Calculer u_1, puis à l'aide des variations de la fonction $g : x\mapsto 1+\dfrac{x^3}{12}$ sur $[0,\beta]$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0,\beta]$.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$.
   Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.
   (d) Écrire en Python un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré au plus égal à 3.

Étant donné un polynôme P de E, on défnit un polynôme $\varphi(P)$ par :

$$[\varphi(P)](X) = (2X-1)\ P'(X) + (X^2 - X - 2)\ P''(X).$$

1. Justifier qu'on a ainsi défini une application linéaire φ.
2. Justifier que φ est un endomorphisme de E.
3. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.
4. (a) On pose $\lambda_0 = 0$. Déterminer un polynôme P_0 de coefficient dominant égal à 1 tel que $\varphi(P_0) = \lambda_0 P_0$.
   (b) On pose $\lambda_1 = 2$. Déterminer un polynôme P_1 de coefficient dominant égal à 1 tel que $\varphi(P_1) = \lambda_1 P_1$.
   (c) On pose $\lambda_2 = 6$. Déterminer un polynôme P_2 de coefficient dominant égal à 1 tel que $\varphi(P_2) = \lambda_2 P_2$.
   (d) On pose $\lambda_3 = 12$. Déterminer un polynôme P_3 de coefficient dominant égal à 1 tel que $\varphi(P_3) = \lambda_3 P_3$.
5. On pose $\mathcal{B}' = \left(1, X - \dfrac{1}{2}, X^2 - X - \dfrac{1}{2}, X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{3}{5}X + \dfrac{11}{20}\right)$.

   Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E telle que la matrice N de φ dans cette base est diagonale.
6. Donner la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}v}{\cos(v)}$.

1. (a) i. Justifier l'existence et calculer $f'(x)$, pour $x \in]-\pi, \pi[$.
   ii. Montrer que f est impaire.
   iii. Montrer que f est strictement croissante.
2. Calculer $h(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{2\ \mathrm{d}u}{1-u^2}$ pour $t \in]-1, 1[$.

   (on utilisera une décomposition $\dfrac{2}{1-u^2} = \dfrac{a}{1-u} + \dfrac{b}{1+u}$*, pour a et b à déterminer)*
3. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u = \tan\left(\dfrac{v}{2}\right)$.
   (a) Exprimer v en fonction de u, puis $\mathrm{d}v$ en fonction de u et $\mathrm{d}u$.
   (b) Montrer que $\cos(v) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

   Indication : on peut calculer d'abord $\cos^2\left(\dfrac{v}{2}\right)$
   (c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4 *(pour les 5/2 qui s'ennuient)*

1. Soient $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (\ln t)^q\ \mathrm{d}t$, pour $p, q \in \mathbb{N}$. Justifier que $I_{p,q}$ converge.
2. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, et $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $I_{p,q,\varepsilon} = \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q\ \mathrm{d}t$, pour $p, q \in \mathbb{N}$.

   Justifier que $I_{p,q,\varepsilon}$ existe, et que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q,\varepsilon} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1,\varepsilon} - \dfrac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$.
3. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = \dfrac{-q}{p+1} I_{p,q-1}$.
4. En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q entiers naturels.