Durée : 3h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.
Le barème tiendra compte de la longueur du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Objectif Mines/Centrale/X/ENS

Questions de cours

Q1. Donner, sans justification, l'ensemble, des valeurs du paramètre réel α pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente.

Q2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$ est-elle convergente ou divergente ? Justifier

Q3. On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Donner l'expression de la primitive F de f qui vaut 1 en 0.

Problème 1

Dans tout ce sujet, I est un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I.

Etant donné une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)w(x)dx$ par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_I f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles que fw est intégrable sur I.

On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.

Etant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m,

$$\int_I P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Généralités sur les formules de quadrature

A - Exemples élémentaires

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.
2. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.
3. Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

B - Construction de formules d'ordre quelconque

On revient au cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

5. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

6. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \ldots, x_n)$.
7. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) dx.$$

8. On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3.

C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Dans cette sous-partie, on suppose que $I = [a, b]$, avec $a < b$.
Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x, t) = \begin{cases} (x - t)^m & \text{si } x \geq t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que φ_m est continue si $m \geq 1$ et discontinue si $m = 0$.

On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$.

On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

9. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où R_m est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) f^{(m+1)}(t) dt.$$

10. En déduire que, si $m \geq 1$,

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

où la fonction $K_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x, t)) = \int_a^b \varphi_m(x, t) w(x) dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j, t).$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) dx \right) dt.$$

La fonction K_m est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature.*
On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

D - Exemple : méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que I est un segment et $\forall x \in I,\ w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0, 1]$ et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

11. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour tout fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a, b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n+1$ points $a_0, \dots, a_n$ équidistants :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad a_i = a + ih,$$

où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.
On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes.* L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)dx - T_n(f).$$

12. Représenter graphiquement $T_n(f)$.
13. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question 11 et les $g_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

14. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$