Durée : 3h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Questions de cours

Q1. Donner, sans justification, l'ensemble, des valeurs du paramètre réel α pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente.

Q2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$ est-elle convergente ou divergente ? Justifier

Q3. On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Donner l'expression de la primitive F de f qui vaut 1 en 0.

Exercice 1 *(durée maximale conseillée 30 min)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$.

Q4. Encadrer $\ln(t)$ lorsque $t \in [1, \mathrm{e}]$

Q5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, puis que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Q6. (a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

(c) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 *(durée maximale conseillée 1h30)*

Q7. Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 + x - 3 = 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ notée α.
Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

Q8. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = f \circ f\,(x) - x$.
On admet que l'on peut factoriser h sous la forme :

$$h(x) = -\frac{(x^2-3x+1)(x^3+x-3)}{(x^2+1)^2+9}.$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a exactement trois solutions distinctes : α, β, β', avec $0 < \beta < \alpha < \beta'$, où α est le réel défini à la question **Q7b**.

b) Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta} = \beta'$ et $f(\beta') = \dfrac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
où f est la fonction définie et étudiée à la question **Q7**.

Q9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs.

Q10. **a)** On suppose que $u_0 = 1$, calculer les valeurs de u_1 et u_2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

b) On suppose que $u_0 = 2$, calculer les valeurs de u_1 et u_2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

Q11. **a)** Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) On suppose que $u_0 \in [0, \beta]$. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Pour la suite de l'exercice, on admet le résultat suivant : quelle que soit la valeur donnée à $u_0 \in \mathbb{R}^+$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

c) Comparer les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ pour les deux cas particuliers $u_0 = 1$ et $u_0 = 2$.

d) On appelle ℓ une **éventuelle limite réelle** de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\ell \in \{\alpha,\ \beta,\ \beta'\}$.

e) Si ℓ' est une **éventuelle limite réelle** de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, quelles sont les valeurs possibles de ℓ' ?

On étudie désormais la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon quelques cas particuliers de valeurs de u_0.

Q12. On suppose que $u_0 = \alpha$. Quelle est la particularité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? La suite est-elle convergente ?

Q13. On suppose que $u_0 \in \{\beta,\ \beta'\}$. Quelle est la particularité des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?
Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q14. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, \beta[$.

a) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, \beta]$.

b) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\beta', 3]$.

c) En utilisant les variations de suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'elles sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3 *(durée maximale conseillée 1h)*

Soit un réel α vérifiant $\alpha \in]0, 1]$. On appelle série de Gregory de paramètre α, la série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{\alpha^n}{2n+1}$.
Dans l'ensemble de l'exercice, on note G_α une série de Gregory ainsi définie.

Partie I - Étude de la convergence de la série G_1

On note de façon usuelle $g_k = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ le terme général de la série G_1.

Q16. Expliquer pourquoi la série G_1 n'est pas absolument convergente.

Q17. On définit la suite (S_n) des sommes partielles de la série G_1 par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $v_n = S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
On a ainsi : $u_2 = S_4 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4$, et $v_2 = S_5 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (v_n) est majorée par u_0. En déduire qu'elle est convergente de limite ℓ_1.

e) De façon similaire, montrer que (u_n) est convergente de limite ℓ_2.

f) Montrer que la série G_1 converge et exprimer sa somme en fonction de ℓ_1 et ℓ_2.