Définition
On dit que la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série des modules $\sum_{n\geq} |u_n|$ (ou valeurs des absolues dans le cas réel) converge.

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument convergente (exemple à connaître).

Questions de cours (commun)

1. On reconnaît une intégrale de Riemann, d'après le cours,
$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$.

2. $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et pour $B \geq 1$, $\int_1^B \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(B) - \arctan(1) \xrightarrow[B\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, donc
$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$
on peut aussi comparer en $+\infty$ par équivalent en citant le théorème de comparaison et les intégrales de Riemann

3. On considère la fonction $f : t \longmapsto \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de la primitive F de f qui vaut 1 en 0.

Exercice 1

Q4. Par croissance de $\ln$ sur $[1, \mathrm{e}]$, on a :

$$\forall t \in [1, \mathrm{e}], \ \boxed{0 = \ln(1) \leq \ln(t) \leq \ln(\mathrm{e}) = 1}$$

Q5. Pour $t \in [1, \mathrm{e}]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \ln(t) \leq 1$, donc $(\ln(t))^{n+1} \leq (\ln(t))^n$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$, donc $\boxed{(un) \text{ est décroissante.}}$
Comme $0 \leq (\ln(t))^n$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par positivité de l'intégrale, $0 \leq u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$
Finalement, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone,
$\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geq 0.}$

Q6. (a) Par intégration par parties, pour $n \geq 1$, en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto (\ln(t))^n$ de classe C^1, on a :
$u_n = [t(\ln t)^n]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t \times \frac{1}{t} \times n(\ln t)^{n-1} \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - nu_{n-1}$ On a donc $\boxed{u_n = \mathrm{e} - nu_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

(b) Pour $n \geq 1$, on a donc $u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$, d'où $u_n = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)} + \frac{-u_{n+1}}{(n+1)}$
Comme $-u_{n+1} \leq 0$ on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}}$$

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$, par théorème d'encadrement de limites (ou gendarmes), on en déduit que $\boxed{\ell = 0}$ est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 *2019 CCINP TPC*

7. (a) La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement croissante.
Sinon, on peut justifier que f est dérivable, comme inverse d'une fonction dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas, puis calculer $f'(x) = \dfrac{-6x}{(1+x^2)^2} < 0,\ \forall x \geq 0$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors

$$f(x) = x \iff \frac{3}{1+x^2} = x \iff 3 = x(1+x^2) \iff x^3 + x - 3 = 0.$$

La fonction $g : x \mapsto x^3 + x - 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc réalise une bijection continue de $\mathbb{R}^+$ vers $g(\mathbb{R}^+) = [-3, +\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $0 \in [-3, +\infty[$, alors 0 admet un unique antécédent par g dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$.
Par ailleurs, comme $g(1) = -1 < 0$ et $g(2) = 7 > 0$, on peut préciser dans l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires que $\alpha \in]1, 2[$.

8. (a) $h(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$ ou $x^3 + x - 3 = 0$. Or :

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Et en utilisant la question précédente, on trouve donc bien trois solutions :
$\alpha,\ \beta = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \beta' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
On remarque que $\beta < \alpha < \beta'$ avec $\sqrt{5} \approx 2,2$

(b)

x	0		β		α		β'		$+\infty$
x^2-3x+1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^3+x-3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

(c) On a directement $\beta = 1/\beta'$. De plus, $h(\beta) = 0$ i.e. $\beta^2 - 3\beta + 1 = 0$ i.e. $f(\beta) = 1/\beta$. Idem pour β'.

9. on démontre par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété
$\mathcal{H}_n$: « $u_n \geq 0$ »
• initialisation :
L'énoncé nous assure que $u_0 \geq 0$, d'où $\mathcal{H}_0$
• hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} = f(u_n)$. or f est positive sur $\mathbb{R}^+$ et par hypothèse de récurrence $u_n \in \mathbb{R}^+$, donc $u_{n+1} \geq 0$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie
• Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

10. (a) $u_0 = 1$ donc $u_1 = 3/2$ et $u_2 = 12/13$. Donc $u_0 < u_1$ et $u_1 > u_2$ donc (u_n) n'est pas monotone.

(b) $u_0 = 2$ donc $u_1 = 3/5$ et $u_2 = 75/34$ donc $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$ donc (u_n) n'est pas monotone.

11. (a) La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, <u>la composée $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$</u>.
on peut aussi étudier les variatins de la fonction par un calcul de dérivée, mais c'est plus long et source d'erreurs de calculs...
(b) Si $u_0 \leq u_2$, alors par croissance $f \circ f$, on montrerait par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. Puis en appliquant à nouveau f (décroissante) : $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$. Dans ce cas, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante. Le cas, $u_0 > u_2$ se traite de la même façon.
(c) Si $u_0 = 1$ alors $u_2 = 12/13 < u_0$ donc la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante.
Si $u_0 = 2$, alors la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
(d) On a $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ donc en passant à la limite, par continuité de $f \circ f$, il vient $l = f \circ f(l)$ i.e. $h(l) = 0$.
Finalement, l est un point fixe de h donc <u>$l \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$</u>.
(e) Avec le même raisonnement, <u>$l' \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$</u>.

12. Si $u_0 = \alpha$, puisque $f(\alpha) = \alpha$, alors la suite <u>(u_n) est stationnaire</u> (égale à α).

13. Si $u_0 \in \{\beta, \beta'\}$, puisque $f \circ f(\beta) = \beta$ et $f \circ f(\beta') = \beta'$, alors les suites
<u>(u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont stationnaires</u>. Par suite, si $u_0 = \beta$, alors <u>(u_{2n}) est stationnaire</u> égale à β et <u>(u_{2n+1}) est stationnaire</u>
égale à $\dfrac{1}{\beta} = f(\beta) \neq \beta$ la suite (u_k) n'est alors pas convergente, car cela contredirait l'unicité de la limite.
idem si $u_0 = \beta'$.

14. (a) $x \in [0, \beta[$, alors $f(x) \in]1/\beta, 3] =]\beta', 3]$. Puis $f(f(x)) \in [f(3), \beta[\subset [0, \beta]$. Donc le segment $[0, \beta]$ est stable par $f \circ f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, <u>$u_{2n} \in [0, \beta]$</u>.
(b) C'est le même raisonnement qu'à la question précédente.
(c) On a vu à la question 11. que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Par ailleurs, elles sont bornées. D'après le <u>théorème de la limite monotone</u>, on en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. Par ailleurs, leur limite est nécessairement un point fixe de h et donc <u>(u_{2n}) converge vers β et (u_{2n+1}) vers β'</u>.
(d) Si (u_n) converge vers L, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers L. En particulier, on obtient $\beta = \beta'$. C'est absurde et <u>(u_n) n'est pas convergente</u>.

Exercice 3 *2020 TPC exo 3 partie I*

Exercice 3.

Partie I - Etude de la convergence de la série G_1

16. $|g_k| = \dfrac{1}{2k+1} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{1/2}{k}$.
Or $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k}$ est une série divergente (série harmonique) donc $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1/2}{k}$ diverge, puis par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum |g_k|$ diverge, c'est à dire
<u>G_1 n'est pas absolument convergente</u>.

17. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\underline{v_n - u_n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} = -\frac{1}{4n+3} \underline{\leq 0}.$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} \\ &= -\frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5} = -\frac{2}{(4n+3)(4n+5)} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)+1} \\ &= \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} = \frac{2}{(4n+5)(4n+7)} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est croissante.

(d) La suite (u_n) est décroissante donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$. En utilisant la question 17.a), on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_0$, i.e. (v_n) est majorée par u_0.
La suite (v_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers une limite l_1

(e) La suite (v_n) est croissante donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$. En utilisant la question 17.a), on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_0$, i.e. (u_n) est minorée par v_0.
La suite (v_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite

(f) Tout d'abord, $v_n - u_n = -\dfrac{1}{2(2n+1)+1} \longrightarrow 0$ donc par unicité de la limite, on obtient $l_2 - l_1 = 0$ i.e. $l_1 = l_2$.
Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent toutes les deux vers la même limite l_1. Donc (S_n) converge vers $l_1 (= l_2)$ i.e. la série G_1 converge et sa somme vaut $l_1 (= l_2)$.