Durée : 4h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

1. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

2.1. Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_2.

2.2. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^u$.

2.4. Prouver l'existence de $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\,\mathrm{d}x$.

3.1. Calculer J_0, J_1, J_2.

3.2. Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.

3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2.4.6.8.\ldots.(2n)}{1.3.5.7.\ldots.(2n+1)}$.

3.4. En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.

3.5. On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

Déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4. A l'aide d'un changement de variable, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la limite $\ell = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.
On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leq \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g)\in E^2$ associe le réel : $\varphi(f,g)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$.
   Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle\ |\ \rangle$.

Partie 1

Soit h élément de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $J_n=\displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\ \mathrm{d}t$.
   Prouver que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h\left(a_n\right)=0$.

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}[f'(t)]^2\ \mathrm{d}t$ convergent. Soit $f\in F$.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$ convergent.
2. Etablir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t$.
   On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie 1.
3. Démontrer
$$\left(\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \leq 4\left(\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty}[f'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right)\qquad (*)$$
4. Déterminer toutes les applications $f\in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(*)$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ sa base canonique.
Soient $a_1, \ldots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E.
   (b) On remarque que pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $(L_i(a_1), \ldots, L_i(a_i), \ldots, L_i(a_n)) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{ème position}}, 0 \ldots, 0)$,
   donc que $L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   Déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base $\mathcal{B}'$.

Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   (a) Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ est une droite vectorielle, et en déterminer un vecteur directeur.
   (c) En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :
   $$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2.$$
4. **On revient au cas général**.
   (a) Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2b)
   (b) Etablir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.
   (c) Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.
   (d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.
5. Dans cette question, on suppose que $n \geq 4$ et que $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Soit u l'endomorphisme de E défini par :
   $$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?
   (b) Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$, puis justifier que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.
   (c) Justifier que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ coïncide avec l'identité $\mathrm{id}_{|\,\mathrm{Im}(u)}^{|\,\mathrm{Im}(u)}$.
   (d) En déduire que u est le projecteur d'axe $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 4

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}(-1+i)$.
   Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2. On note z_1, z_2 et z_3 ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules.
   Déterminer les modules $|z_1|$, $|z_2|$, et $|z_3|$.
3. On suppose en outre que leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}\cdot$, et que z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.
   Déterminer les arguments puis les formes trigonométriques de chacun des trois nombres z_1, z_2 et z_3.
4. Construire les images M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.