Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés.

La suite nulle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U.

1. Montrer que si $a \in U$, $b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.
   En déduire que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$.
   (a) Montrer que (c, d) est une base de U.
   (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?
3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à U. On notera r et s les suites telles que $\forall N \in \mathbb{N}$, $r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.
   (b) Montrer que (r, s) est une autre base de U.
4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x$, $v_1 = y$, donner en fonction de x et u les composantes de v dans la base (r, s).
   (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

   Les deux questions d'informatique suivantes doivent être rédigées en Python.
5. (a) Écrire avec Python une fonction $G(x, y, n)$ ayant pour variables d'entrées deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in V$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$.
   (b) Quelle est la complexité de G ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.
3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.
4. Justifier que l'on définit bien une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-ikx)}.$$

Exercice 3

I. Un exemple

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x+3y, 3x+y).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id})$.
2. Calculer $f((1,1))$ et $f((1,-1))$. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

II. Cas général

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.
On considère f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$.

3. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f.
4. Justifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
5. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
6. Calculer $(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
7. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et de Id_E.
8. Etablir par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que :

$$f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E.$$

   Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour n dans $\mathbb{N}$.
9. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{2} + \dfrac{a_n}{2}$. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour n élément de $\mathbb{N}$.
10. Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 4

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2 - 1) = P(X-1) \times P(X+1)$$

1. Montrer que si a est racine de P alors $(a+1)^2 - 1$ et $(a-1)^2 - 1$ sont aussi des racines de P.
2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.
   (a) Vérifier que lorsque a_0 est une racine, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.
   (b) Montrer que lorsque a_0 est un réel > 0, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels positifs.
   (c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
   (d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$.
3. Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.
4. Montrer que si le degré de P est > 0 alors P a pour unique racine 0.
5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Exercice 5

On pose, lorsque cela est possible

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t^2-1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.
3. Calculer $f(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi \ : \ u > 0 \mapsto \mathrm{ch}(u)$.
4. Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
5. Vérifier que f est positive sur I.
6. Montrer que f est décroissante sur I.
7. Soit $x \in I$. Démontrer la relation
$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$
   On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.
9. Pour tout réel $x > 0$, on pose
$$\varphi(x) = x\ f(x)\ f(x+1)$$
   Prouver que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
10. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

11. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)\ f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que

$$f(n) \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

12. En utilisant des parties entières, prouver que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

13. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
14. Prouver que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.