Durée : 4h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Questions de cours

A) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique alternée (i.e. $((-1)^n u_n)_{n\geq 0})$ est de signe constant). Rappeler les deux hypothèses (h_1) et (h_2) manquantes pour pouvoir appliquer le théorème spécial des séries alternées, afin d'obtenir la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$, et en notant pour $N \in \mathbb{N}$, $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ le reste d'ordre N, préciser une inégalité faisant intervenir R_N.

B) Rappeler l'expression, pour $z \in \mathbb{C}$ de la somme de la série exponentielle de z.

C) Donner sans justifier la nature de $\int_0^1 t^a \, \mathrm{d}t$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Problème 1

I) Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

II) Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de A^n.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

III) Une autre preuve du résultat précédent

14. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Problème 2

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'applications : automatique, traitement du signal, etc.
On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie I - Définition de la fonction

Q16. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

Q17. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+, de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

Q18. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0; +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \, .$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie II - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q19. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour $t \in [0, 1]$:

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \, .$$

Q20. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - (-t)^n = (1+t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \, .$$

Q21. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1} \, .$$

On pourra remarquer que, pour $n \geq 2$ et $t \in [0, 1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

Q22. Écrire une fonction **python** d'en-tête `def fEntier(n):` qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On supposera la fonction `log` (pour $\ln$) importée de la bibliothèque **numpy**.

Partie III - Variations de f

Q23. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Q24. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leq \beta$. Comparer, pour $t \in]0, 1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Q25. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1} .$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} .$$

Q26. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

Q27. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

Partie IV - Équivalent de f en $+\infty$

Q28. Montrer que, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x} .$$

Q29. En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) .$$

Q30. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.