Durée : 4h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Questions de cours

A) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique alternée (i.e. $((-1)^n u_n)_{n\geq 0})$ est de signe constant). Rappeler les deux hypothèses (h_1) et (h_2) manquantes pour pouvoir appliquer le théorème spécial des séries alternées, afin d'obtenir la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$, et en notant pour $N \in \mathbb{N}$, $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ le reste d'ordre N, préciser une inégalité faisant intervenir R_N.

B) Rappeler l'expression, pour $z \in \mathbb{C}$ de la somme de la série exponentielle de z.

C) Donner sans justifier la nature de $\int_0^1 t^a \, \mathrm{d}t$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Problème 1

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ est convergente.

   On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.
3. On admet que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$. Donner l'expression de $f'(x)$.
4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

7. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \qquad \text{(II.1)}$$

10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbf{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbf{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

11. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$.

On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y$. En déduire la formule de Stirling (II.1).

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

12. Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

13. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que
$$\forall n \geq n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n.$$

14. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^2}$.

16. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$.

II.C.3)

17. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

18. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

Problème 2

I) Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$
et
$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$
On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

II) Limite

7. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

8. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$