Durée : 3h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

1. Pour un réel $x>0$, justifier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$, puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).
2. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.
3. Soient a et b des réels avec $b > a > 0$. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Que peut-on en déduire ?
4. Pour $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :
$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\mathrm{d}t$$
puis établir que $F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\mathrm{d}t$.
5. Pour $x>0$, démontrer de même l'inégalité :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\mathrm{d}t - 1 \leq F(x)$.
6. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$et la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
7. Étudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.

Problème 1

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A avec $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$, $\forall x \in \mathbb{C}$, et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*
3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(x) = i\chi_B(ix), \forall x \in \mathbb{C}$.
4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants.
   On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n$.
5. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.
6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?
7. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n, On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

1. Soient $M = (m_{kl})_{1\leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.
2. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.
3. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.