DS n° III Mathématiques

lycée A. Brizeux
M.Roger 2022-2023

Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Écrire A, puis A^2 sous forme de combinaisons linéaires de J et I.
2. En déduire un polynôme annulateur P de A.
3. A est-elle inversible ?
4. Factoriser P.
5. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer explicitement le polynôme R_p, reste dans la division euclidienne de X^p par P.
6. En déduire l'expression de A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Problème 1

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1} dt$$

7. Pour un réel $x > 0$ fixé, justifier la convergence de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$

puis, à l'aide du changement de variable $u = 2xt$, démontrer qu'elle vaut $I(x) = \dfrac{\pi}{4x}$.

8. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$, et que F est paire.
9. Enoncer le théorème de dérivation terme à terme pour une série de fonctions.
10. Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, et en déduire la monotonie de F sur $]0, +\infty[$.
11. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :

$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$

puis établir que $F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$

12. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\mathrm{d}t - 1 \leq F(x)$$

13. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0^+$ et la limite de $F(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.
14. Représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.
15. Démonter que G est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
16. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, établir la convergence de l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$$

et montrer que $I_\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$, en remarquant que $\sin t = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

17. Démontrer que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-2nxt}$$

18. En déduire, en justifiant la réponse que

$$F(x) = G(x),\ \forall x > 0.$$

Problème 2 *étude de séries de fonctions*

1. Un premier exemple.

1.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.

Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, calculer explicitement l'expression de la somme $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.

1.2. Pour $a \in]0,1[$ fixé, démontrer que la série des fonctions dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur le segment $[-a,a]$.

En déduire que $F'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $\forall x \in]-1,1[$, en justifiant la validité des calculs à l'aide d'un théorème du cours.

1.3. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F'(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)^2F'(x)$.

2. Un deuxième exemple.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1-x^n} \end{array}$.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1,1[$, on pose cette fois : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

2.1. Soit $a \in]0,1[$. Prouver la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq} f_n$ sur le segment $[-a,a]$.

En déduire que F est définie et continue sur $]-1,1[$.

2.2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.

2.3. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) \geq \dfrac{x^n}{n(1-x)}$, puis en admettant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \ \forall x \in [0,1[$$

en déduire que que

$$F(x) \geq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}, \ \forall x \in [0,1[$$

2.4.
En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x) = \lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = +\infty$.

3. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0) = 0$ et telle que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.
Soit $x \in]0,1[$.

3.1. Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)\mathrm{d}t$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$, à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\ln u}{\ln x}$, pour x fixé.

3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $h : t \longmapsto f(x^t)$ est décroissante, puis l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\mathrm{d}t.$$

3.3. En déduire l'existence de $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi que l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f(x^t) \ \mathrm{d}t \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} f(x^t) \ \mathrm{d}t$$

3.4. Conclure avec soin que $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.