Correction du DS3 de mathématiques, proposé le 14/11

Exercice n° 1

Question 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 = 0$.

Cette équation du second degré n'a pas de racine évidente, on calcule son discriminant : $\Delta = -4 + 4\mathrm{i}$. L'équation a donc deux solutions distinctes et on a besoin d'une racine carrée de Δ pour les donner. Plutôt que de procéder avec la forme algébrique, on observe que l'argument de Δ est évident : c'est $\frac{3\pi}{4}$. Il suit que $\Delta = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et que $\delta = 2\sqrt{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$ est une racine carrée de Δ.

Finalement, $\boxed{\text{l'équation a deux solutions : } \dfrac{-2\mathrm{i}+\delta}{2\mathrm{i}} \text{ et } \dfrac{-2\mathrm{i}-\delta}{2\mathrm{i}}}$.

Question 2 : Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = -x^2 \ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. On applique la méthode du cours, en commençant par écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, xy' - 2y = -x^2 \ln x \iff y' - \frac{2}{x}y = -x \ln x \ : (E).$$

— **Résolution de l'équation homogène** (E_h) : $y' - \frac{2}{x}y = 0$ **:** on pose, pour $x > 0$, $a(x) = -\frac{2}{x}$ et alors $A(x) = -2\ln(x) = -\ln(x^2)$ est une primitive de $a(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Il suit que <u>la solution de (E_h) est $\left\{x \longmapsto \lambda x^2 / \lambda \in \mathbb{R}\right\}$</u>.

— **Recherche de solution particulière avec variation de la constante :**
soit, pour $x > 0$, $f(x) = \lambda(x)x^2$ avec $\lambda(x)$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
f est solution de (E) si, et seulement si :

$$xf'(x) - 2f(x) = -x^2 \ln x \iff x(\lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)) - 2x^2\lambda(x) = -x^2 \ln x \iff \lambda'(x) = -\frac{\ln x}{x}.$$

On reconnait une forme « $u'u$ » et il suit que $\lambda(x) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$ convient.
Finalement, <u>$f(x) = -\frac{x^2(\ln x)^2}{2}$ est solution particulière de (E)</u>.

— **Solution générale de** (E) **:** $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{x \longmapsto x^2\left(\lambda - \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) / \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.

Question 3 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 3t + 1$ avec les conditions $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}\right.$.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (on la note (E)), avec des conditions initiales. On applique la méthode du cours :

— **Résolution de l'équation homogène** (E_h) : $y'' + y' - 2y = 0$ **:** l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0 \iff (r-1)(r+2) = 0$. Elle admet deux solutions réelles : 1 et -2, on en déduit que <u>les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^{-2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$</u>.

— **Recherche de solution particulière :** on cherche une solution particulière affine, de la forme $f(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. f est solution de (E) si, et seulement si :

$$f''+f'-2f = 3t+1 \iff a-2(at+b) = 3t+1 \iff -2at+a-2b = 3t+1 \iff \left\{\begin{array}{l} -2a = 3 \\ a - 2b = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{4} \end{array}\right.$$

Finalement, <u>$f(t) = -\frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$ est solution particulière de (E)</u>.

— **Solution générale de** (E) **:** <u>les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$</u> avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

— **Trouver la solution qui vérifie les conditions initiales :** soit $f(t) = \lambda\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. f vérifie $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}\right.$ si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{array}\right.$: $(\star)$.

Or, $f(0)=\lambda+\mu-\frac{5}{4}$ et $f'(0)=\lambda-2\mu-\frac{3}{2}$ on a donc : $(\star) \iff \left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu-\frac{5}{4}=1\\ \lambda-2\mu-\frac{3}{2}=2\end{array}\right.$.

En soustrayant la 2è équation dans la première, on a :

$$(\star) \iff \left\{\begin{array}{l}3\mu+\frac{1}{4}=-1\\ \lambda-2\mu-\frac{3}{2}=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\frac{5}{12}\\ \lambda=2\mu+\frac{3}{2}+2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\frac{5}{12}\\ \lambda=\frac{8}{3}\end{array}\right.$$

Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ qui vérifie les conditions est } f(t)=\frac{8}{3}\mathrm{e}^{t}-\frac{5}{12}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{3}{2}t-\frac{5}{4}}$.

Question 4 : $I_1=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1-2\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=[x-2\mathrm{Arctan}\,x]_0^1 \boxed{=\ 1-\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{I_2 \text{ est l'intégrale d'une fonction impaire sur un segment symétrique par rapport à } 0,\ I_2 \text{ est donc nulle.}}$

Si on ne l'a pas vu, pour calculer I_2, on commence par linéariser $\sin^3$. On a, pour tout réel x :

$$\sin^3 x=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3=-\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)=-\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin 3x-6\mathrm{i}\sin x\right)=-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$$

Il suit que $I_2=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boxed{=\ 0}$

On calcule I_3 par parties en posant $\left\{\begin{array}{l}u'(t)=\mathrm{e}^{1-2t}\\ v(t)=t+3\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}u(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2t}\\ v'(t)=1\end{array}\right.$. Il vient :

$$I_3=\int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}(t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[(t+3+\frac{1}{2})\mathrm{e}^{1-2t}\right]_0^1 \boxed{=\ -\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-1}+\frac{7}{4}\mathrm{e}}$$

Question 5 : Faisons le changement de variable $\varphi(t)=\sin t$. Il vient :

$$I_4=\int_{\mathrm{Arcsin}\ 0}^{\mathrm{Arcsin}\ \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}\ (\sin t)}{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{t}}{|\cos t|}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \boxed{=\ \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice n° 2

On considère la fonction $f:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}\end{array}\right.$.

1. f est clairement définie sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ et il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$ pour déduire son étude globale sur $\mathbb{R}$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ qui est négatif sur $\mathbb{R}^+$ et strictement négatif pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^+}$.

   Aux bornes de $\mathbb{R}^+$ on a d'une part $\boxed{f(0)=1}$ et d'autre part $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=-1}$. On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	1	$\searrow$ -1

2. D'après la question précédente et avec le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } I=]-1;1]}$.
3. Soit $y\in I$ et x l'unique élément de $\mathbb{R}^+$ tel que $f(x)=y$. On a $x=f^{-1}(y)$: on veut à exprimer x comme fonction de y. On a :

$$y=f(x)\iff y=\frac{1-x^2}{1+x^2}\iff y(1+x^2)=1-x^2\iff x^2(y+1)=1-y\iff x^2=\frac{1-y}{1+y}$$

   Puisque $x\geq 0$ on en déduit $x=\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$. Finalement, $\boxed{\forall y\in]-1;1],\ f^{-1}(y)=\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}}$.

Problème

L'objectif de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle :

$$(E) : \ y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln x$$

I. **Préliminaires**.

1. $\boxed{(E) \text{ est une équations différentielle linéaire du second ordre}}$.
   Le cours indique comment résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre ainsi que les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
   On n'a donc donc pas de méthode pour résoudre directement (E).

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \iff 1 = a(x^2+1) + (bx+c)x \iff 1 = (a+b)x^2 + cx + a$.
   On en déduit que $(a,b,c) = (1,-1,0)$ et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}}$

   b) $\boxed{\text{Une primitive de } x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)} \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ est donc } x \mapsto \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$.

3. $x \mapsto x\ln x$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x t\ln t \ dt$ en est donc une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   A l'aide d'une intégration par parties, calculons une expression sans intégrale de $F(x)$:
   $$F(x) = \int_1^x t\ln t \ dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2} \ dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$
   $\boxed{x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \text{ est donc une primitive de } x \mapsto x\ln x \text{ sur } \mathbb{R}^{+^*}}$ (les primitives étant égales à une constante additive près, on peut choisir $F + \frac{1}{4}$).

4. En prodédant de façon analogue : $\boxed{x \mapsto (x - \frac{x^3}{3})\ln x - x + \frac{x^3}{9} \text{ est une primitive de } x \mapsto (1-x^2)\ln x \text{ sur } \mathbb{R}^{+^*}}$.

II. **Résolution de l'équation homogène** $(E_h) : \ y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = 0.$

1. On teste si $y : x \mapsto x$ est une solution de (E_h) : $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0 - \frac{2x}{1+x^2} \times 1 + \frac{2}{1+x^2} \times x = 0$.
   $\boxed{\text{Finalement, } x \mapsto x \text{ est bien solution de } (E_h)}$.

2. a) On a, $\forall x > 0$: $\boxed{z'(x) = \frac{xy'(x)-y(x)}{x^2}}$ et $z''(x) = \frac{x^3y''(x)-2x(xy'(x)-y(x))}{x^4}$ soit $\boxed{z''(x) = \frac{x^2y''(x)-2xy'(x)+2y(x)}{x^3}}$.

   b) On raisonne par équivalences :
   $$\begin{aligned}
   \left(z' \text{ est solution de } (\widehat{E})\right) &\iff xz'' + \tfrac{2}{1+x^2}z' = 0 \\
   &\iff \tfrac{x^2y''(x)-2xy'(x)+2y(x)}{x^2} + \tfrac{2}{1+x^2}\tfrac{xy'(x)-y(x)}{x^2} = 0 \\
   &\iff x^2y''(x) - 2xy'(x) + y(x) + \tfrac{2}{(1+x^2)}(xy'(x) - y(x)) = 0 \\
   &\iff x^2y''(x) - 2xy'(x)(1 - \tfrac{1}{1+x^2}) + 2y(x)(1 - \tfrac{1}{1+x^2}) = 0 \\
   &\iff y''(x) - \tfrac{2x}{1+x^2}y'(x) + \tfrac{2}{1+x^2}y(x) = 0 \\
   &\iff (y \text{ est solution de } (E_h))
   \end{aligned}$$

   Finalement, $\boxed{z' \text{ est solution de } (\widehat{E}) \text{ si, et seulement si, } y \text{ est solution de } (E_h)}$.

3. $(\widehat{E})$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
   On a $(\widehat{E}) \iff u' + \frac{2}{x(1+x^2)}u = 0$. Soit $a(x) = \frac{2}{x(1+x^2)}$. D'après les préliminaires, $A(x) = 2\ln x - \ln(x^2+1)$ est une primitive de $a(x)$.
   $\boxed{\text{Les solutions de } (\widehat{E}) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \text{ c'est-à-dire } x \mapsto \lambda(1 + \frac{1}{x^2}) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

4. On a vu que y est solution de (E_h) si, et seulement si, z' est solution de $(\widehat{E})$. D'après la question précédente, $z'(x)$ est donc de la forme $z'(x) = \lambda(1+\frac{1}{x^2})$ soit, en intégrant, $z(x) = \lambda(x - \frac{1}{x}) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il suit que $y(x) = xz(x)$ est de la forme $y(x) = \lambda(x^2-1) + \mu x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_h) \text{ est } \left\{x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

III. **Résolution de** (E).

1. On va adapter la méthode de la variation de la constante à l'ordre 2. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $f(x) = \lambda(x)(x^2-1) + \mu(x)x$ avec λ et μ des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ auxquelles on impose la condition :

$$(C_1): \ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ (x^2-1)\lambda'(x) + x\mu'(x) = 0$$

a) λ et μ étant deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, f l'est aussi et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f'(x) = 2x\lambda(x) + \underbrace{\lambda'(x)(x^2-1) + x\mu'(x)}_{=0 \text{ d'après } (C_1)} + \mu(x) \ \boxed{= 2x\lambda(x) + \mu(x)}$;
ainsi que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \boxed{f''(x) = 2\lambda(x) + 2x\lambda'(x) + \mu'(x)}$.

b) On raisonne par équivalences : f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f''(x) - \tfrac{2x}{1+x^2}f'(x) + \tfrac{2}{1+x^2}f(x) = (1+x^2)\ln x$$

$$\iff 2\lambda(x) + 2x\lambda'(x) + \mu'(x) - \tfrac{2x(2x\lambda(x)+\mu(x))}{1+x^2} + \tfrac{2(\lambda(x)(x^2-1)+\mu(x)x)}{1+x^2} = (1+x^2)\ln x$$

$$\iff \lambda(x)\underbrace{\left(2 - \frac{4x^2}{1+x^2} + \frac{2(x^2-1)}{1+x^2}\right)}_{=\frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2}=0} + 2x\lambda'(x) + \mu'(x) + \mu(x)\underbrace{\left(\frac{-2x+2x}{1+x^2}\right)}_{=0} = (1+x^2)\ln x$$

$$\iff 2x\lambda'(x) + \mu'(x) = (1+x^2)\ln x$$

Finalement, $\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ si, et seulement si : } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 2x\lambda'(x) + \mu'(x) = (1+x^2)\ln x}$.

c) D'après ce qu'on a fait précédemment, sous l'hypothèse (C_1), f est une solution de (E) si, et seulement si, (C_2) est vérifiée. Si on parvient à satisfaire simultanément (C_1) et (C_2), on aura donc une solution de (E).

$$\left\{\begin{array}{l}(C_1)\\(C_2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcccc}\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & (x^2-1)\lambda'(x) & + & x\mu'(x) & = & 0\\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & 2x\lambda'(x) & + & \mu'(x) & = & (1+x^2)\ln x\end{array}\right.$$

Calculons, pour $x > 0$, $(C_1) - x(C_2)$, il vient :

$$(x^2-1)\lambda'(x) - 2x^2\lambda'(x) = -x(1+x^2)\ln x \iff \boxed{\lambda'(x) = x\ln x}.$$

En remplaçant dans (C_2), on obtient alors $\mu'(x) = (1+x^2)\ln x - 2x^2\ln x \iff \boxed{\mu'(x) = (1-x^2)\ln x}$.
D'après les préliminaires, $\lambda(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ et $\mu(x) = (x - \frac{x^3}{3})\ln x - x + \frac{x^3}{9}$ conviennent.

Finalement, $\boxed{f(x) = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)(x^2-1) + x\left((x - \frac{x^3}{3})\ln x - x + \frac{x^3}{9}\right) x \text{ est une solution de } (E)}$.

2. (E) est une équation différentielle linéaire, ses solutions sont donc de la forme d'une solution de son équation homogène (qu'on a résolue à la partie II) auxquelles on ajoute une solution particulière de (E) (on en a trouvé une à la question précédente). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\left\{x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x + \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)(x^2-1) + x\left((x - \frac{x^3}{3})\ln x - x + \frac{x^3}{9}\right) \ / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

$$= \boxed{\left\{x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right)\ln x - \frac{5x^4}{36} - \frac{3x^2}{4} \ / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$