**Durée : 3h. Sujet e3a/CCINP**

**Toute affirmation doit être justifiée.**

Les calculatrices sont **interdites** Tout résultat doit être encadré voire souligné

## Exercice 1 Vrai ou Faux ? (6 min. max, pas de justification attendue)

Q.1) L'ensemble des solutions de l'équation : $\dfrac{1}{t} < 2$ est $]0, \dfrac{1}{2}[$ ?

Q.2) $\dfrac{1}{1+t} \underset{t \to 0}{=} 1 + t + t^2 + o(t^2)$ ?

Q.3) $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t}\right)$ ?

Q.4) $\dfrac{\ln t + t}{t + t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ ?

Q.5) Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \underset{t \to +\infty}{\sim} v_n$ est si $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge ?

Q.6) Toute fonction $f$ continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ?

## Exercice 2

Pour $n$ un entier naturel, on s'intéresse à l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

1. Déterminer la nature de $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{p \geq 0} \mathrm{e}^{-p\pi}$ converge et préciser la valeur de $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p\pi}$
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer l'égalité $1 - \mathrm{e}^{2i\theta} = -2i\mathrm{e}^{i\theta} \sin(\theta)$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}$$
*on pourra effectuer un changement d'indice $\ell = k + n$*
5. En déduire que, pour tout réel $x$ positif, on a :
$$\left| \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)} \mathrm{e}^{-x} \right| \leq (2n+1)\mathrm{e}^{-x}$$
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n$ converge, puis justifier que l'on peut écrire :
$$I_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \left( \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} \right) \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

**Exercice 3**

Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel non nul.
Soit $\varphi$ l'application qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur $\varphi$.**
   (a) Démontrer que $\varphi$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de $\varphi$.
3. On considère alors l'application $\psi$ qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $Q$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$
   (a) Justifier que l'application $\psi$ est linéaire.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.
   (c) Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
   (d) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   (a) Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   (b) Pour $k \in [|0, n|]$, soit $\psi_k$ la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
   (c) Déterminer les composantes de $\varphi$ dans cette base.

## Exercice 4

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$.

   (a) On considère la suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $\gamma_n = S_n - \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\, dt$.

   i. Pour $n \geq n_0$, justifier que $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n+1) - \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\, dt$.

   ii. En déduire que $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.

   iii. Justifier que $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ est minorée par $0$.

   iv. Conclure que $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ est convergente.

   (b) En déduire l'existence d'un réel, noté $C$, pour lequel on a, lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$ :

   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(\ln(n)) + C + o(1)$$

   (c) Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt$ et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln^2(k)}$.

2. Montrer que la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)}$ est convergente.

   *On note* $K = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ *sa somme.*

3. (a) Prouver, pour tout entier naturel $n$ au moins égal à $2$, l'inégalité :

   $$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geq n \ln(n) - n + 1$$

   (b) En déduire, quand $n$ tend vers $+\infty$, l'estimation : $\ln(n!) = n \ln(n) + O(n)$.

4. (a) Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x \ln(x) - \lambda x = \ln(n)$. On note $r_n$ cet unique réel.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r_n = +\infty$ puis établir l'équivalence $r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$.