Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

On considère un jeu où une équipe de trois joueurs, J_1 ,J_2 etJ_3 , doit résoudre une énigme. Les joueurs peuvent obtenir de l'aide en interrogeant deux sources d'information susceptibles de leur communiquer au maximum quatre indices notés i_1 , i_2 , i_3 et i_4 . Les deux sources d'information sont appelées S_A et S_B . Une seule source peut être interrogée par l'ensemble de l'équipe. Le choix de la source d'information se fait de la façon suivante : on jette successivement deux dés à 6 faces, équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note S la valeur obtenue en ajoutant le nombre de points donné par le lancer de chacun des dés. Si $S \leq 6$, on interroge S_A , sinon on interroge S_B

1. On note A l'évènement "interroger S_A " et B l'évènement "interroger S_B ".
   Déterminer les probabilités de chacun de ces évènements.

   Lorsqu'une source est interrogée, elle peut révéler de 0 à 4 indices parmi les 4 possibles. L'information fournie peut être modélisée comme étant un sous-ensemble de $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. On rappelle que l'ensemble des parties de I est noté $\mathcal{P}(I)$ et que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(I)) = 2^4 = 16$. Ainsi, l'ensemble vide $\emptyset$ et les sous-ensembles $\{e_1, e_4\}$,$\{e_2, e_3, e_4\}$ représentent 3 informations susceptibles d'être communiquées, fournissant respectivement 0, 2 et 3 indices parmi les 4 possibles.La source S_A connait 8 informations et la source S_B connait les 8 informations restantes. La répartition entre S_A et S_B est effectuée de façon aléatoire pour chaque partie jouée par l'équipe. À l'issue de cette répartition, S_A dispose de k informations permettant de connaître l'indice i_4 et les $8 - k$ informations restantes ne donnent pas l'indice i_4 . La source interrogée révèle à chaque joueur, successivement et de façon indépendante, une information choisie au hasard parmi les 8 dont elle dispose. Il est ainsi possible que la même information soit communiquée à deux ou trois joueurs de l'équipe.

2. Combien y a-t-il d'informations contenant l'indice i_4 ? On pourra raisonner en distinguant les valeurs possibles du cardinal d'un sous-ensemble de I.

3. Déterminer, en fonction de k, les probabilités des évènements suivants :
   - évènement C_j :
   "le joueur J_j obtient de la source S_A une information contenant l'indice i_4 ", pour $j \in \{1, 2, 3\}$;
   - évènement C'_j :
   "le joueur J_j obtient de la source S_B une information contenant l'indice i_4 ", pour $j \in \{1, 2, 3\}$.

4. Quelle est la probabilité que l'équipe obtienne exactement deux informations fournissant l'indice i_4 ?

5. Quelle est la probabilité que chacun des joueurs obtienne une information fournissant l'indice i_4 ?

6. L'équipe a obtenu trois informations fournissant chacune l'indice i_4 . Quelle est la probabilité que ces informations proviennent de la source S_A

Problème 1

Partie I

1. (a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t\,s}\,\mathrm{d}s$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

   (b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

   (c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que S est développable en série entière et donner son développement.

   (b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$

3. (a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

   (b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}dt - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$. Justifier l'égalité : $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

   (c) Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que : $S(x) = R(x) + \ln x + \gamma$

4. (a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}dt$.

   Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}dt$

   et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq g_n(x) - g(x) \leq \dfrac{x^n}{n}$

   (b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

   (c) En admettant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

5. Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$.

6. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $R(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

   (b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ dx = 1$$

Partie II

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $\quad xy'' + y' - (x+1)y = 1.$

1. On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   (a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq \dfrac{K}{n!}$.
   En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.
2. On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :
$$S = \left\{ y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; \forall x > 0, \quad xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \right\}$$
   (a) Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$ pour tout $x > 0$.
   Montrer que $y \in S$ si et seulement si z vérifie :
$$\forall x > 0, \quad xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x} \qquad (\star).$$
   (b) Déterminer les $Z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0.$$
   (c) Déterminer les $Z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = e^{-x}.$$
   (d) En déduire l'expression des fonctions $z \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$ de **II.2.**(a), en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$: *On utilisera* $R(x)$ *et* $R(2x)$.
   (e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in S$.
3. (a) Sachant que $R(x) = -\ln(x) + \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in S$ ayant une limite finie en 0.
   Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par :
   $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma \quad$ pour $x > 0$ (vu en **I.3.)**(c)).
   (b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question **II. 1)** : on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **II. 1)** ?

Exercice 2

On définit pour tout etier naturel non nul n, $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit la série entière $H(x) = \sum_{n\geq 1} h_n x^n$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.