

Exercice n°1 : Différents aspects de l'écoulement dans une lame de savon (57) Centrale PC 2021

Q12. Le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est la dérivée locale de \vec{v} (accélération locale), elle correspond à la variation de \vec{v} en un point donné de l'écoulement en fonction du temps.
 Le terme $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$ est la dérivée convective de \vec{v} (accélération convective), elle correspond à la variation de \vec{v} due à un changement de point de l'écoulement, à un instant t donné.

Q13. Le terme $-\text{grad}P$ est la densité volumique des forces de pression,
 Le terme $\eta \Delta \vec{v}$ est la densité volumique des forces de viscosité.
 Le troisième terme traduit la densité volumique d'autres forces éventuelles, souvent la pesanteur.

Q14. Prenons le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes dans laquelle on néglige toutes les autres forces que les forces de pression :

$$\rho \cdot \text{rot} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} \right] = -\text{rot}[\text{grad}(P)]$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot \left[\frac{\partial \text{rot} \vec{v}}{\partial t} + \text{rot} \left(\frac{1}{2} \text{grad} v^2 \right) + \text{rot}(\text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}) \right] = -\text{rot}[\text{grad}(P)]$$

D'après les formules d'analyse vectorielle fournies :

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \text{rot} \vec{v}}{\partial t} + \vec{0} + \text{div} \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{v} - \text{div}(\text{rot} \vec{v}) \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \text{rot} \vec{v} - (\text{rot} \vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \vec{0}$$

L'écoulement étant incompressible, on a :

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

On en déduit finalement :

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \vec{0} \quad \Delta \quad m-9.$$

Q15. La lame possède d'après Q8 une épaisseur maximale selon y de $1 \mu\text{m}$, alors que ses dimensions longitudinales sont de l'ordre de quelques cm. On peut donc la considérer bidimensionnelle, appartenant au plan Oxz .

Remarque : on considérera donc également que cette vitesse ne dépend pas de la coordonnée y .

On a alors :

$$\vec{v} = v_x(x, z) \cdot \vec{e}_x + v_z(x, z) \cdot \vec{e}_z$$

On calcule :

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y$$

$$(\vec{\Omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$$

Le terme d'étirement de vortex est nul.

Q20. On calcule :

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v(z, t) \cdot \frac{\partial \vec{v}(z, t)}{\partial x} = \vec{0}$$

Q21. La pesanteur est négligée : l'équation de Navier-Stokes s'écrit donc en projection sur Oz :

$$0 = -\frac{\partial P(z)}{\partial z}$$

On en déduit que P est une constante dans tout le fluide.

La projection de l'équation de Navier-Stokes s'écrit en projection selon Ox :

$$\rho \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2}$$

qui donne bien l'équation proposée.

Q22. L'équation vérifiée par $f(z)$ est :

$$i\omega f(z) = v_c \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}$$

dont l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 = \frac{i\omega}{v_c} = \left(\pm \frac{1+i}{\delta} \right)^2$$

La solution générale s'écrit :

$$f(z) = A \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-i\frac{z}{\delta}} + B \cdot e^{\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i\frac{z}{\delta}}$$

Q23. Pour que la vitesse du fluide ne diverge pas lorsque z tend vers l'infini, on doit avoir :

$$B = 0$$

On calcule alors :

$$v(z, t) = A \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-i\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow v(z, t) = A \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

La vitesse étant continue par rapport à z , on doit avoir :

$$v(0, t) = V_0 \cdot \cos(\omega t)$$

On en déduit :

$$A = V_0$$

L'allure de $v(z, t)$ est strictement analogue à celle du champ dans un conducteur ohmique. *tout ça revient*

Q25. Le terme de viscosité, seul terme dynamique de l'équation, est responsable de la diffusion de vitesse (ou plutôt de quantité de mouvement).

Q26. On calcule :

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y = V_0 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot \left(-\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right) \vec{e}_y = \frac{V_0}{\delta} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \vec{e}_y$$

En dehors de la couche limite la vorticité est nulle.

La partie qui suit me semble d corr l e de la partie précédente, en particulier la longueur caractéristique (des variations de la vitesse), qui était δ dans la modélisation précédente, sera ici d , diamètre du cylindre. Remarquons que dans le programme de PC la seule longueur caractéristique (utile au calcul de Re) est vue dans le cas de la sphère.

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu_c}{\omega}} \text{ à estimer}$$

Q27. On observe des lignes de courant elliptiques dans toute la section du tube signe d'une vorticité non nulle. Elles sont dues à l'action du petit cylindre. La couche limite est donc au moins aussi grande que le rayon du tube.

On a bien : $\delta \gg d$

Problème : avec $f = 1$ Hz, on calcule d'après Q26 $\delta = 0.6$ mm (et diminue avec f) donc bizarre !!

Q28. La condition limite est :

$$\delta = d \Leftrightarrow \omega_{lim} = 2 \cdot \frac{v_c}{d^2}$$

Q29. Cf cours. Re ; $A.D$; Ψ

Q30. Ici on prend :

donc la vitesse assurant un bas Reynolds est telle que :
 $v \ll \frac{v_c}{d} = v_{lim}$

Je ne vois pas comment obtenir une estimation sans ordre de grandeur de d .

Avec $d = 1$ mm (mais pourquoi ?) on calcule :

$$v = 1 \text{ mm.s}^{-1}$$

C'est l'ordre de grandeur observable par exemple sur :

<https://www.youtube.com/watch?v=wMErfWZpVMM>

Voici l'article qui se rapporte à la manip :

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01487166>

Q31. D'après la définition du nombre de Reynolds, si $Re \ll 1$, le terme d'accélération convective est négligeable devant le terme visqueux. On obtient donc bien l'équation proposée.

Q32. En ordre de grandeur :

$$v \approx a \cdot \omega$$

Q33. En ordre de grandeur :

$$\rho \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \rho a \omega^2 ; \rho \|\Delta \vec{v}\| \approx \frac{\eta a \omega}{d^2}$$

Le premier terme est négligeable devant le second si :

$$\omega \ll \frac{v_c}{d^2}$$

On retrouve la condition de la Q28, soit :

$$\delta \gg d$$

La dérivée locale est donc bien négligeable dans le cas de l'écoulement propos e.

Q34. La variation de pression étant sinusoïdale, on a :

$$\langle \text{grad} P \rangle = \overline{\text{grad}(P)} = \vec{0}$$

et :

$$\langle \eta \Delta \vec{v} \rangle = \eta \Delta \vec{v}$$

Or le terme diffusif, qui explique la mise en rotation du fluide (la diffusion de vorticité annoncée en Q14), ne peut être nul, donc l'équation stationnaire précédente n'explique pas le mouvement. De plus, l'équation linéaire n'explique pas qu'un sens de rotation soit privil egi e dans l'écoulement : il faut donc faire appel à des non-linéarités.

Q35. En ordre de grandeur :

$$\|\text{grad} P\| \approx \|\eta \Delta \vec{v}\| \approx \left\| \frac{\eta \vec{v}_s}{d^2} \right\| ; \|\eta \Delta \vec{v}\| \approx \frac{\eta}{d^2} (\|\vec{v}_s\| + \|\vec{v}_p\|)$$

$$\|\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\| \approx \rho \frac{(\vec{v}_p)^2}{d}$$

Q36. L'équation fournit donc en valeurs moyennes et en norme :

$$\rho \frac{(\vec{v}_p)^2}{d} \approx \frac{\eta}{d^2} \langle \|\vec{v}_s\| \rangle$$

qui donne bien le résultat attendu.

Q37. On a vu que $Re \ll 1$. On a donc :

$$\rho \frac{v_p d}{\eta} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{(v_p)^2 d}{\eta} \ll v_p$$

$$\Leftrightarrow v_s \ll v_p$$

Q38. L'écoulement principal compense le gradient de pression mais ne donne pas de vortex, l'écoulement secondaire est responsable des vortex.

On peut parler d'écoulement redress e car la vitesse de l'écoulement secondaire est proportionnelle au carr e de la vitesse de l'écoulement principal, le signe n'est pas pris en compte.

Q39. Le nombre de Strouhal est le rapport de :

$$\tau_1 = \frac{1}{f}, \text{ p eriod}e \text{ du ph en}om ene$$

$$\tau_2 = \frac{L}{v_\infty}, \text{ durée caractéristique d'advection du ph en}om ene$$

Q40. Le modèle d evelopp e donne, pour un nombre de Reynolds $Re=40$, un nombre de Strouhal :

$$St = 0,1055$$

En considérant que la dimension caractéristique $L = d$, diamètre du fil, on peut en déduire la distance X :

$$X = \frac{v_t}{f} = \frac{L \cdot v_t}{S_t v_\infty} = \frac{d}{2 S_t} = \frac{2.10^{-3}}{2 \cdot 0,1} = 1 \text{ cm}$$

Valeur cohérente avec le schéma.

On peut vérifier également que le nombre de Reynolds est bien égal à 40, en prenant v_∞ et $d = 2$ mm. On peut donc considérer que le modèle rend compte de l'observation expérimentale.

Q41. La vitesse du vent est v_∞ , vitesse relative du fluide et de l'obstacle. L'écoulement se faisant dans l'air, on peut penser que Re est supérieur à 10^5 : le nombre de Strouhal est donc voisin de $St = 0,2234$.

La distance entre deux tourbillons est comme en Q40 :

$$X = \frac{v_t}{f}$$

On en déduit :

$$L = \frac{S_t v_{\infty}}{f} = \frac{S_t v_{\infty} X}{v_t} = \frac{S_t X}{2} = 0,2234 * \frac{10}{2} = 1 \text{ km}$$

Cette valeur semble tout à fait cohérente avec la taille de l'île observée sur la photo.

On calcule pour terminer $Re = \rho \frac{v_{\infty} L}{\eta} = 4.10^9$, ce qui valide le résultat.

Remarques : 1. La méthode est fort retorse pour calculer la taille d'une île !!
2. Cette question ressemble beaucoup à la précédente, ou alors quelque chose m'a échappé...

Exercice n°2 : Le feu et l'eau

(43)

Centrale PSI 2021

10. Les trois modes de transferts thermiques sont :

- la diffusion thermique : l'énergie thermique se propage de proche en proche, quelque soit la nature du milieu considéré;
- la convection : si un objet matériel se déplace, il entraîne avec lui son énergie interne. Cet effet se produit spontanément dans les fluides.
- le rayonnement : les objets échangent de l'énergie électromagnétique par rayonnement. La puissance transmise étant d'autant plus grande que la différence de température entre les corps est grande. Cet effet ne se produit que dans les milieux transparents dans la gamme de longueurs d'onde rayonnées.

voilà + explication

11. Le rôle joué par trois contributions :

- la diffusion thermique : les corps solides présents s'échauffent uniquement par ce biais.
- la convection : les gaz présents sont mis en mouvement. Cela entraîne un transfert thermique des zones où la combustion se déroule vers les zones qui n'ont pas encore brûlées. La convection est aussi importante car elle permet à l'air froid et contenant encore de l'oxygène d'arriver à proximité des zones qui brûlent.
- le rayonnement : les zones incandescentes émettent un rayonnement électromagnétique dans l'infrarouge et le visible qui chauffe des objets qui peuvent être éloignés de la source. Ce mode de transfert contribue donc à la propagation des incendies.

12. On considère une tranche comprise entre x et $x + dx$ et l'on fait un bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$.
La capacité thermique à pression constante du système est :

$$dC_p = S dx \mu c_p$$

La variation de l'enthalpie du système : $d^2H = dC_p [T(x, t + dt) - T(x, t)]$

$$\text{Donc } d^2H = S \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) S dx dt$$

La variation de l'enthalpie du système peut aussi s'écrire, en tenant compte des échanges avec l'extérieur :

$$d^2H = j_{th}(x, t) S dt - j_{th}(x + dx, t) S dt + P_c \mu S dx dt$$

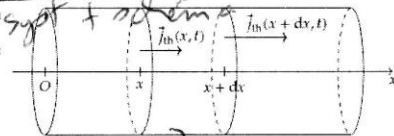
$$\text{Donc } d^2H = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x}(x, t) S dx dt + P_c \mu S dx dt$$

$$\text{L'équation de la diffusion est alors : } \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) S dx dt = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x}(x, t) S dx dt + P_c \mu S dx dt$$

$$\text{Ce qui se simplifie en : } \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x}(x, t) + P_c \mu S$$

$$\text{Or d'après la loi de FOURIER : } j_{th}(x, t) = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) + \frac{P_c}{c_p}$$



*la pince
Bilan
Fourier
ég avec exp D et K*

zone de combust

$$\text{Donc } \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) + \kappa \text{ avec } \begin{cases} D = \frac{\lambda}{\mu c_p} \\ \kappa = \frac{P_c}{c_p} \end{cases}$$

13. Dans la zone non-altérée, la puissance thermique est nulle, donc $\kappa = 0$ et l'équation de la diffusion est : $\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$

14. On note $l = 10$ cm la distance typique étudiée. Le temps de diffusion est $\tau_d \approx \frac{l^2}{D}$.
La durée de combustion peut être estimée en déterminant le temps nécessaire pour que la température du bois passe de T_1 à T_c : $P_m \tau_c = c_p (T_c - T_1)$. Donc $\tau_c \approx \frac{c_p (T_c - T_1)}{P_m}$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \tau_d \approx \frac{l^2}{D} \\ \tau_c \approx \frac{c_p (T_c - T_1)}{P_m} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \tau_d \approx 1,0 \cdot 10^5 \text{ s} \\ \tau_c \approx 1,0 \cdot 10^2 \text{ s} \end{cases}$$

$\tau_d \gg \tau_c$: le temps caractéristique de diffusion est très grand devant le temps de combustion.

15. c est la vitesse d'avancement du front de combustion.

16. On pose $T(x, t) = \theta(u)$ et $u = x - ct$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 \theta}{du^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -c \frac{d\theta}{du} \end{cases}$$

L'équation de la diffusion est alors :

$$\begin{cases} D \frac{d^2 \theta}{du^2} + c \frac{d\theta}{du} + \kappa = 0 & \text{dans la zone de combustion} \\ D \frac{d^2 \theta}{du^2} + c \frac{d\theta}{du} = 0 & \text{dans la zone inaltérée} \end{cases}$$

En notant $\theta'(u)$ la dérivée de $\theta(u)$:

$$\begin{cases} D \frac{d\theta'}{du} + c\theta'(u) + \kappa = 0 & \text{dans la zone de combustion} \\ D \frac{d\theta'}{du} + c\theta'(u) = 0 & \text{dans la zone inaltérée} \end{cases}$$

17. Les solutions générales des équations précédentes sont :

$$\begin{cases} \theta'(u) = a_2 e^{-\frac{cu}{D}} - \frac{\kappa}{c} = 0 & \text{dans la zone de combustion} \\ \theta'(u) = a_3 e^{-\frac{cu}{D}} & \text{dans la zone inaltérée} \end{cases}$$

En intégrant par rapport à u :

$$\begin{cases} \theta_2(u) = a_2 - \frac{a_2 D}{c} e^{-\frac{cu}{D}} - \frac{\kappa}{c} u = 0 & \text{dans la zone de combustion} \\ \theta_3(u) = a_3 - \frac{a_3 D}{c} e^{-\frac{cu}{D}} & \text{dans la zone inaltérée} \end{cases}$$

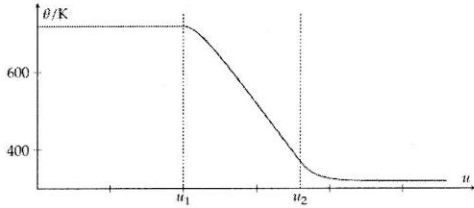
En renommant les constantes, et en tenant compte du fait que la température est uniforme dans la zone brûlée :

$$\begin{cases} \theta_1(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1 \\ \theta_2(u) = a_2 + b_2 e^{-\frac{cu}{D}} - \frac{\kappa}{c} u = 0 & \text{pour } u_1 < u < u_2 \\ \theta_3(u) = a_3 + b_3 e^{-\frac{cu}{D}} & \text{pour } u > u_2 \end{cases}$$

18. Pour $u < u_1$, la température est uniforme et elle vaut T_c : $a_1 = T_c$.

Dans la limite $u \rightarrow +\infty$, la température est T_∞ : $a_3 = T_\infty$.

19. L'allure de la courbe est :

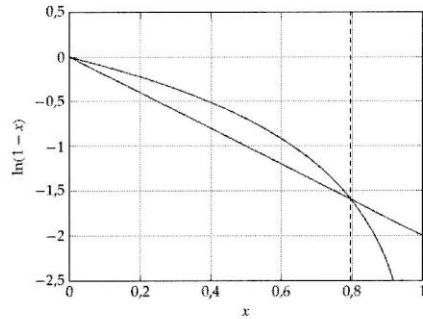


20. Aux interfaces, il y a continuité de la température et du vecteur densité de courant thermique. Comme la conductivité thermique est la même dans les trois domaines :

$$\begin{cases} \theta_1(u_1^-) = \theta_2(u_1^+) \\ \theta_2(u_2^-) = \theta_3(u_2^+) \\ \frac{d\theta_1}{du}(u_1^-) = \frac{d\theta_2}{du}(u_1^+) \\ \frac{d\theta_2}{du}(u_2^-) = \frac{d\theta_3}{du}(u_2^+) \end{cases}$$

21. On considère l'équation donnée : $-\frac{c^2}{\kappa D}(T_c - T_\infty) = -\ln\left[1 - \frac{c^2}{\kappa D}(T_i - T_\infty)\right]$

On pose $x = \frac{c^2}{\kappa D}(T_i - T_\infty)$, l'équation précédente est alors : $\frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\ln(1 - x)$



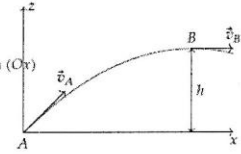
L'abscisse du point d'intersection des deux courbes est $x = 0,80$. Donc $c = \sqrt{\frac{x \rho c_p D}{T_i - T_\infty}}$

Donc $c = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$ $c = \sqrt{\frac{0,80(4,0 \cdot 10^3 \text{ W kg}^{-1})(1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})}{(2,0 \cdot 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1})(520 \text{ K} - 320 \text{ K})}}$

22. c est la vitesse de propagation du front de combustion. Pour qu'une buche de longueur $L = 1 \text{ m}$ brûle complètement, il faut donc une durée $\tau = \frac{L}{c}$. Donc $\tau = 3,5 \cdot 10^4 \text{ s}$. Soit $\tau = 9,8 \text{ h}$

38. Quel peut bien être l'intérêt de cette question ?
On considère une goutte d'eau. Les équations sont :

$$\begin{cases} v_{Ax} = v_{Ay} = \frac{v}{\sqrt{2}} & \text{angle initial de } 45^\circ \\ v_{Ax} = v_{Bx} & \text{conservation de la quantité de mouvement selon } (Ox) \\ \frac{1}{2}m(v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2) = mgh + \frac{1}{2}mv_{Bx}^2 & \text{conservation de l'énergie mécanique} \end{cases}$$



Donc $v = 2\sqrt{gh}$.
On estime $h = 30 \text{ m}$. Donc $v = 35 \text{ m/s}$.

39. La vitesse de l'eau dans le tuyau est $V_c = \frac{4Q}{\pi d^2}$. Soit $V_c = 2,17 \text{ m s}^{-1}$

L'extrémité de la lance à incendie est plus étroite que le tuyau. La vitesse de l'eau à la sortie est donc plus élevée que dans le tuyau.

40. En appliquant la loi de la statique des fluides : $\Delta P = \rho gh$. Soit $\Delta P = 2,9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

41. Le nombre de REYNOLDS est $R_e = \frac{\rho d V_c}{\eta}$

Soit $R_e = 1,5 \cdot 10^5$. $R_e = \frac{(1,00 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3})(70 \text{ mm})(2,17 \text{ m s}^{-1})}{1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}^{-1}}$

$R_e > 2 \cdot 10^3$: L'écoulement est turbulent.