

Exercice n°1 : Le manchot empereur CCINP PC 2021

Q10. La norme de $\vec{j}_{th}$ est une puissance transférée par unité de surface (en $W.m^{-2}$)

Q11. La loi de FOURIER s'écrit : $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad} T$, ce qui donne directement, avec le formulaire et pour un transfert purement radial, la relation voulue. Le signe moins de cette loi empirique s'explique car le gradient est orienté des basses températures vers les hautes températures, mais le flux thermique va naturellement des zones chaudes vers les zones froides.

Q12. On effectue, comme le suggère l'énoncé, un bilan thermique entre les instants t et $t + dt$, pour un système constitué par un cylindre creux de hauteur ℓ , compris entre les rayons ρ et $\rho + d\rho$. D'après le premier principe :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \delta Q_e + \delta Q_c + \delta W$$

Le cylindre est indéformable donc $W = 0$ et il n'y a pas de terme source (pas de métabolisme) donc $\delta Q_s = 0$. De plus, on est en régime stationnaire donc $dU = 0$ par définition. Le terme d'échange peut se décomposer en 2 termes :

$$0 = \delta Q_e = \delta Q_{entrant} \text{ on } \rho - \delta Q_{sortant} \text{ on } \rho + d\rho$$

On en déduit que le flux thermique est le même en ρ et en $\rho + d\rho$, c'est-à-dire qu'il est constant. On peut donc écrire :

$$2\pi\rho\ell \times (-\lambda \frac{dT}{d\rho}) = \Phi_0$$

Ceci se résume donc, en passant toutes les constantes à droite, à $\rho \frac{dT}{d\rho} = A$ où A est une constante.

Par intégration (en passant ρ à droite), on obtient la forme du profil de température :

$$T(\rho) = A \ln \rho + B$$

On trouve les constantes A et B au moyen de 2 conditions aux limites en R_1 et R_2 :

$$\begin{cases} A \ln R_1 + B = T_1 \\ A \ln R_2 + B = T_2 \end{cases}$$

En soustrayant ligne à ligne, il vient $A = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}$. En reprenant la première ligne, on trouve $B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln R_1$ et donc on obtient :

$$T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln \frac{\rho}{R_1} + T_1$$

Q13. Par définition, $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1-2}}$ où Φ_{1-2} est le flux thermique allant de 1 vers 2. Ici :

$$\Phi_{1-2} = \Phi_0 = -2\pi\rho\ell\lambda \frac{dT}{d\rho} = -2\pi\rho\ell\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{\rho}$$

On identifie donc, après simplification, $R_{th} = \frac{1}{2\pi\ell\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

Q14. Si le cylindre est homogène, $m = \rho_e \times \pi R^2 \ell \Rightarrow R = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho_e\ell}}$

Application numérique : $R = 9 \text{ cm}$ ce qui est cohérent.

Q15. On reprend un bilan thermique (premier principe), mais cette fois pour un manchot dans son ensemble. En régime stationnaire, on a toujours $dU = 0$ et on néglige tout travail. On a donc $\delta Q_e + \delta Q_c = 0$. Or $\delta Q_e = -\Phi_{th} dt$ (flux sortant) et $\delta Q_c = \mathcal{P}_m dt$ donc $\Phi_{th} = \mathcal{P}_m$.

Q16. Le flux thermique sortant traverse successivement les différentes couches qui sont donc en série. On peut donc sommer les résistances (qualitativement, les couches se superposent et la résistance thermique augmente d'autant). Ainsi :

$$R_{th,1} = \frac{1}{2\pi\ell} \left[\frac{1}{\lambda_g} \ln \frac{R + e_g}{R} + \frac{1}{\lambda_a} \ln \frac{R + e_g + e_a}{R + e_g} + \frac{1}{\lambda_p} \ln \frac{R + e_g + e_a + e_p}{R + e_g + e_a} \right]$$

Application numérique : $R_{th,1} = 1,07 \text{ K.W}^{-1}$.

Q17. Le flux conducto-convectif est l'intégrale de $\vec{j}_{th,cc}$ sur la surface d'aire S , soit $\Phi_{th,cc} = Sh(T_p - T_e)$. D'après la définition de la résistance thermique, on a donc $R_{th,cc} = \frac{1}{hS}$.

Q18. Un raisonnement identique amène à $R_r = \frac{1}{4\pi\sigma T_e^3 S}$.

Q19. Les pertes par flux conducto-convectif et par rayonnement se cumulent, pour un même écart de température entre le plumage et l'extérieur. Les résistances thermiques sont donc en parallèle (en dérivation) et donc :

$$R_{th,2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{th,cc}} + \frac{1}{R_r}} = \frac{1}{hS + 4\pi\sigma T_e^3 S}$$

Application numérique : $R_{th,2} = 0,03 \text{ K.W}^{-1}$ en prenant pour S la surface latérale du cylindre de hauteur ℓ et de rayon $R + e_g + e_a + e_p$.

Q20. A nouveau, le flux traversant $R_{th,2}$ est celui ayant traversé toutes les couches internes, donc $R_{th,1}$ et $R_{th,2}$ sont en série, ce qui donne $R_{th,tot} = R_{th,1} + R_{th,2}$.

Application numérique : $R_{th,tot} = 1,10 \text{ K.W}^{-1}$.

On en déduit $\mathcal{P}_m = \Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,tot}}$.

Application numérique : $\mathcal{P}_m = 50 \text{ W}$ en accord avec l'énoncé.

Q21. Tout d'abord, on constate que la puissance $\mathcal{P}_m$ a été un peu sous-estimée, même si l'ordre de grandeur est le bon (85 W pour un individu isolé).

Par ailleurs, le fait que les manchots se regroupent tend à faire baisser leurs besoins énergétiques (on parle de thermorégulation sociale) : d'après le tableau, plus le groupe est important, plus la puissance due au métabolisme nécessaire à maintenir leur température corporelle est faible. Ceci s'explique physiquement en considérant que lorsque le groupe s'agrandit, le nombre de manchots à la périphérie (donc la surface de contact avec l'extérieur, et donc le flux thermique perdu) croît moins vite que le nombre de manchots total (donc que la puissance produite).

Schématiquement, on peut considérer que seuls les manchots à la périphérie sont au contact du froid, les autres étant protégés et ont donc peu de besoins énergétiques. Plus précisément, leur métabolisme sert à réchauffer leurs voisins et n'est pas perdu à l'extérieur du groupe.

Exercice n°2 : Mesure d'une tension superficielle

CCINP PC 2021

Q22. D'après le théorème de PYTHAGORE, on a $R^2 = a^2 + (b - R)^2$, d'où $R^2 = a^2 + b^2 + R^2 - 2Rb$ et $R = \frac{a^2 + b^2}{2b}$.

Q23. D'après l'équation barométrique dans le manomètre (fluide incompressible), $\Delta P = \rho_e gh$.

Q24. En utilisant la loi de LAPLACE, on a $\rho_e gh = \frac{4\gamma}{R}$, d'où $\gamma = \frac{R\rho_e gh}{4}$.

On obtient finalement $\gamma = \frac{(a^2 + b^2)\rho_e gh}{8b}$.

Application numérique : $\gamma = 0,028 \text{ N.m}^{-1}$.

Le savon étant un tensioactif, il est normal que sa tension superficielle soit inférieure à celle de l'eau. Comparaison + com

Exercice n°3 : Microfluidique

CCINP PC 2021

Q32. $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ est l'accélération convective.

$-\text{grad}P$ est la résultante volumique des forces de pression.
 $\eta \Delta \vec{v}$ est la résultante volumique des forces de viscosité.

Q33. $Re = \frac{\rho v h}{\eta} = 10^{-2}$. Comme $Re \ll 1$, on peut négliger la convection et l'équation de NAVIER-STOKES se simplifie en $-\text{grad}P + \eta \Delta \vec{v} = 0$.

Q34. Comme $\vec{v} = v_x(z) \vec{u}_x$, on a $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$, donc on retrouve bien $-\text{grad}P + \eta \Delta \vec{v} = 0$.

Q35. En projetant l'équation de NAVIER-STOKES sur $\vec{u}_x$, on obtient $-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$.

Q36. Comme $\frac{\partial P}{\partial x} = -K$, on a $\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{K}{\eta}$, d'où $\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{Kz}{\eta} + A$ et $v_x(z) = \frac{Kz^2}{2\eta} + Az + B$.
 D'après les conditions aux limites, on a $\frac{K h^2}{8\eta} + \frac{A h}{2} + B = -L_g \left(\frac{K h}{2\eta} + A \right)$ et $\frac{K h^2}{8\eta} - \frac{A h}{2} + B = L_g \left(\frac{K h}{2\eta} + A \right)$.
 On en déduit que $\frac{K h^2}{4\eta} + 2B = \frac{L_g K h}{\eta}$, d'où $B = \frac{L_g K h}{2\eta} - \frac{K h^2}{8\eta}$.
 De plus, on a $A h = -2A L_g$, d'où $A = 0$.
 On obtient finalement $v_x(z) = \frac{K L_g h}{2\eta} - \frac{K}{2\eta} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$.

Q37. La vitesse s'annule lorsque $\frac{K L_g h}{2\eta} - \frac{K}{2\eta} \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right) = 0$, soit $z_0 = \pm \sqrt{L_g h + \frac{h^2}{4}}$.

Lorsque $L_g \ll h$, on a $|z_0| = \frac{h}{2} \sqrt{1 + \frac{4L_g}{h}} \approx \frac{h}{2} + L_g$.

On en déduit que $L_g = |z_0| - \frac{h}{2}$.

On parle de longueur de glissement, car il s'agit de la distance entre la position où la vitesse s'annule, et les parois du canal.

Q38. Le débit volumique s'écrit $D_v = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{K L_g h}{2\eta} - \frac{K}{2\eta} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right) dz$, soit $D_v = \frac{K \ell L_g h^2}{2\eta} + \frac{K \ell h^3}{8\eta} - \frac{K \ell}{2\eta} \left(\frac{z^3}{3} \right)_{-h/2}^{h/2}$, d'où $D_v = \frac{K \ell h^2}{2\eta} \left(L_g + \frac{h}{6} \right)$.

Q39. En intégrant, on a $P(L) - P(0) = -KL$, d'où $K = \frac{\Delta P}{L}$.

Q40. On a $K = \frac{2\eta D_v}{\ell h^2 \left(L_g + \frac{h}{6} \right)}$, d'où $\Delta P = \frac{2\eta L D_v}{\ell h^2 \left(L_g + \frac{h}{6} \right)}$, et $R_h = \frac{2\eta L}{\ell h^2 \left(L_g + \frac{h}{6} \right)}$.

On parle de résistance hydraulique car le débit volumique est l'équivalent de l'intensité, et la différence de pression est l'équivalent de la tension, donc on retrouve bien l'équivalent de la loi d'OHM $U = RI$.

Q41. Pour $L_g = \frac{h}{2}$, on a $R_h = \frac{3\eta L}{\ell h^3}$ et $R_{h,ng} = \frac{12\eta L}{\ell h^3}$, donc $\frac{R_h}{R_{h,ng}} = \frac{1}{4}$.

Le glissement permet d'avoir une conduite qui s'oppose quatre fois moins à l'écoulement qu'en l'absence de glissement.

Exercice n°4 : Utilisation de l'énergie marémotrice

CCINP PSI 2019

C.1. La puissance par unité de surface est $\frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} = 11 \text{ W/m}^2$.

C.2. Le texte affirme que la puissance d'un ensemble d'éoliennes est la somme de la puissance de chaque éoliennes.
 Pour des turbines sous-marines, cette relation sera aussi vérifiée si les turbines sont loin les unes des autres. Si elles sont proches, l'écoulement de l'eau en amont de certaines turbines sera plus lent en présence des autres turbines. La puissance totale sera plus faible que la somme des puissances des différentes turbines.

C.3. On note $D = 11 \text{ m}$ le diamètre de la turbine. La surface de celle-ci est alors : $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Donc $S = 95 \text{ m}^2$.

Or le débit volumique est $D_m = S U$ où U est la vitesse débitante. Donc $U = \frac{D_m}{S} = \frac{4 D_m}{\pi D^2}$. Donc $U = 2,7 \text{ m/s}$.

Cela correspond à une puissance surfacique comprise entre 100 W/m^2 et 200 W/m^2 .

Dans le cas de l'usine de la Rance, la surface utilisée pour le calcul est celle du bassin de rétention et pas celle des turbines. Les deux puissances surfaciques calculées ne sont pas les mêmes, et cela ne présente pas un grand intérêt de les comparer.

C.4. L'équation de conservation de la masse s'écrit : $\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) = 0$.

Si l'écoulement est incompressible, $\rho(M, t) = \rho_0$ est uniforme et constant. Donc $\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$ et $\text{div}(\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) = \rho_0 \text{div} \vec{v}(M, t)$.

Pour un écoulement incompressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit : $\text{div} \vec{v}(M, t) = 0$.

On considère une portion de tube de courant délimitée par les section S_1 et S_2 . On note $\Sigma = S_1 \cup \Sigma_L \cup S_2$.

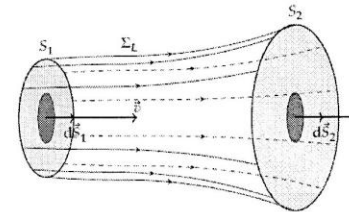


schéma + calcul

Le champ de vitesse étant à flux conservatif : $\oint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$.

Donc, en tenant compte de l'orientation de la surface S_1 : $-\int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma_L} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$.

Or, la surface latérale Σ_L est un tube de courant : $\vec{v} \perp d\vec{S}$ et donc $\int_{\Sigma_L} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$.

Si la vitesse est uniforme sur les deux surfaces S_1 et S_2 , la conservation du bilan est $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Le débit volumique $S v$ se conserve le long de l'écoulement.

$\rho S v$ est le débit massique du fluide à travers une section de l'écoulement.

C.5. Le débit massique est $m(x) = \rho S(x) v(x)$. Or la puissance cinétique est $E_c(x) = \frac{1}{2} m(x) v^2(x)$.

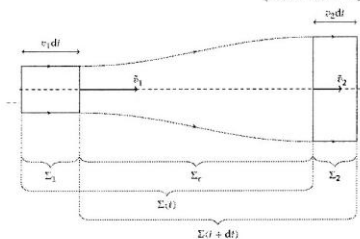
Donc $E_c(x) = \frac{1}{2} \rho S(x) v^3(x)$.

C.6. Au vu de la formule demandée, ce n'est pas un bilan qui est demandé, mais seulement le calcul de la variation de puissance cinétique : $\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho S_2 v_2^3 - \frac{1}{2} \rho S_1 v_1^3$.

En utilisant la conservation du débit massique : $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_0 v_0$.

Donc $\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho S_0 v_0 (v_2^3 - v_1^3)$.

C.7. On considère un système fermé $\Sigma(t)$ défini par le schéma ci-dessous : $\Sigma(t) = \Sigma_1 \cup \Sigma_r$ et $\Sigma(t+dt) = \Sigma_2 \cup \Sigma_c$.



sys.

schéma

On note :

- $\vec{p}(t)$: quantité de mouvement du fluide dans $\Sigma(t)$;
- $\vec{p}_1(t)$: quantité de mouvement du fluide dans Σ_1 ;
- $d\vec{p}_1$: quantité de mouvement du fluide dans Σ_1 ;
- $d\vec{p}_2$: quantité de mouvement du fluide dans Σ_2 ;
- $\vec{F}$: résultante des forces que le fluide exerce sur l'hélice;
- $\vec{F}_p$: résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ .

La bilan de quantité de mouvement pour le système fermé Σ s'écrit : $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -\vec{F}dt + -\vec{F}_p dt$.

La pression sur la face externe de Σ étant uniforme : $\vec{F}_p = \vec{0}$.

En outre, $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = [d\vec{p}_2 + \vec{p}_1(t+dt)] - [d\vec{p}_1 + \vec{p}_1(t)]$.

En régime permanent : $\vec{p}_1(t+dt) = \vec{p}_1(t)$, donc $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = d\vec{p}_2 - d\vec{p}_1$.

Or $\begin{cases} d\vec{p}_1 = \rho S_1 v_1 dt \vec{v}_1 \\ d\vec{p}_2 = \rho S_2 v_2 dt \vec{v}_2 \end{cases}$, le bilan devient donc $\rho S_2 v_2 dt \vec{v}_2 - \rho S_1 v_1 dt \vec{v}_1 = -\vec{F} dt$.

Donc $\vec{F} = \rho S_1 v_1 \vec{v}_1 - \rho S_2 v_2 \vec{v}_2$.

En utilisant la conservation du débit massique : $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_0 v_0$.

La force exercée par le fluide sur l'hélice est : $\vec{F} = \rho S_0 v_0 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$.

En admettant que $P_{\text{hélice}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_0$, $P_{\text{hélice}} = \rho S_0 v_0^3 (v_1 - v_2)$.

C.8. En admettant que $\Delta E_c = -P_{\text{hélice}}$, on obtient : $\frac{1}{2} \rho S_0 v_0 (v_2^2 - v_1^2) = \rho S_0 v_0^3 (v_2 - v_1)$.

Donc $v_0 = \frac{v_2 + v_1}{2}$. La puissance est alors $P_{\text{hélice}} = \frac{1}{4} \rho S_0 (v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2)$.

C.9. Avec l'expression précédente de la puissance : $\frac{dP_{\text{hélice}}}{dv_2} = \frac{1}{4} \rho S_0 [2(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) - (v_1 + v_2)^2]$.

Donc $\frac{dP_{\text{hélice}}}{dv_2} = \frac{1}{4} \rho S_0 [2(v_1^2 - v_2^2) - (v_1 + v_2)^2]$.

La puissance est maximale si $\frac{dP_{\text{hélice}}}{dv_2} = 0$, donc si $2(v_1^2 - v_2^2) = (v_1 + v_2)^2$.

Soit $2(v_1 - v_2) = v_1 + v_2$. D'où $v_2 = \frac{v_1}{3}$.

La puissance est maximale si $v_2 = \frac{v_1}{3}$. Dans ce cas $v_0 = \frac{2v_1}{3}$.

La puissance maximale est donc : $P_{\text{max}} = \rho S_0 \left(\frac{2v_1}{3}\right)^3 (v_1 - \frac{v_1}{3})$.

Donc $P_{\text{max}} = \rho S_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) v_1^4$. D'où $P_{\text{max}} = \frac{8}{27} \rho S_0 v_1^4$.

C.10. La puissance incidente est $P_{\text{inc}} = \frac{1}{2} \rho S_1 v_1^3$.

Le rendement est tel que $\eta \leq \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{inc}}}$. Donc $\eta \leq \frac{\frac{8}{27} \rho S_0 v_1^4}{\frac{1}{2} \rho S_1 v_1^3}$.

Avec $S_0 = S_1$ (ce qui est en complète contradiction avec tout ce qui a été fait au-dessus) $\eta \leq \frac{16}{27}$.

C.11. L'énoncé ne donne pas de descriptif du dispositif étudié, il faut donc se contenter de donner une liste de raisons banales :

- Tous les éléments qui constituent la chaîne de conversion de puissance (turbine, réducteur, alternateur, transport de l'énergie sur la terre ferme) présentent des pertes énergétiques.
- La vitesse des courants de marées varie au cours du temps ; il est sûrement difficile d'optimiser une turbine pour une large plage de vitesse.
- L'environnement marin favorise la corrosion, le dépôt de vase ou d'algues sur les turbines. Le rendement de celles-ci est donc inférieur à la valeur maximale.
- ...

Exercice n°5 : Vidange d'une baignoire

Voir correction liée au barème par compétences.

La correction confond fluide incompressible et écoulement incompressible. Vraie démo (cf MF1) :

① écoulement incomp : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla \rho) = 0$

② éq cons. : $\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

③ formule : $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla \rho) \rho$

$\boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0}$

Les notations de l'énoncé sont gênantes, mais il faut procéder à un bilan comme dans le cours :

$dE_c = \dots$

$= \frac{1}{2} \rho v_2 dt S_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1 dt S_1 v_1^2$

d'où $\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \rho v_0 S_0 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_0 S_0 v_1^2$

$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \rho v_0 S_0 (v_2^2 - v_1^2)}$

Ds n°4 : barème de l'exercice 5

Le principe de résolution est celui de l'exercice 5 du chapitre MF3. On peut alors obtenir la relation donnant la hauteur initiale en fonction des différents paramètres :

$$h_0 = \left(\frac{s}{S}\right)^2 \frac{g}{2} T^2$$

S'approprier	- schéma de la situation - attribution de symboles aux différentes grandeurs pertinentes (h_0, s, S, $h(t)$, T...) - proposer des valeurs aux grandeurs non connues : s, S...		/ 3
Analyser	- proposition d'utiliser le théorème de Bernoulli (version 2) - hypothèses du théorème de Bernoulli - hypothèses supplémentaires (régime quasi stationnaire, section $s \ll S$) - choix de la ligne de courant		/ 4
Réaliser	- écriture du théorème de Bernoulli - lien entre $h(t)$ et la vitesse d'éjection - exploitation et simplification de la relation à l'aide des hypothèses - écriture de l'équation différentielle - intégration par séparation des variables - caractérisation de la durée de la vidange - expression de la hauteur d'eau initiale et AN		/ 7
Valider	- comparaison à la hauteur d'une baignoire - critique des hypothèses ou des valeurs numériques choisies		/ 2
Communiquer	- rédaction		/ 2