Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 10 Décembre 2022
(Durée : 4 heures)
Documents, calculatrice et portables interdits

Niveau CCINP

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Problème 1

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
0_n la matrice nulle d'ordre n
et I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\},\\
\mathrm{Im}(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},\\
\mathrm{Sp}(M) \text{ le spectre de } M,\\
E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)\\
\text{et} \quad \mathrm{Im}_\lambda(M) = \mathrm{Im}(M - \lambda I_n).
\end{gathered}$$

Définitions :

- Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
  on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$;

  On définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A, B] = AB - BA$.

- Soient f et g, deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;
  on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$;

  On définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Déterminer le spectre de A.

I.1.b. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

I.1.c. A est-elle diagonalisable ?

I.1.d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.

I.2.

I.2.a. Déterminer le spectre de B.

I.2.b. Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

I.2.c. B est-elle diagonalisable ?

I.3.

I.3.a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

I.4.

I.4.a. Vérifier que $[A, B] = C$.

I.4.b. Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II : ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

II.1. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

II.2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E.

II.3.

II.3.a. Vérifier que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geqslant n$.

II.3.b. Montrer que X^n est un vecteur propre de g.

Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

II.4.

II.4.a. Vérifier que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$. *On pourra faire une récurrence*

II.4.b. Montrer que X^{n+1} est un polynôme annulateur de f^i et en déduire que $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.

II.5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant n+1$.

Problème 2

Notations.

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\, dt$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.
Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

1 Etude de la fonction φ.

On désigne par d (respectivement δ) la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $d(t) = t - 1 + \cos(t)$ (repectivement $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$).

I.1. **Etude des fonctions d et δ.**

I.1.1 Etudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t} \leq \alpha$.

I.1.2 Etudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \beta$.

I.2. **Existence de la fonction φ sur $[0, +\infty[$.**
Etablir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.

I.3. **Limite de la fonction φ en $+\infty$.**

I.3.1 Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, pour $0 \leq x_1 \leq x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

I.3.2 Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser $I.1.2$).

I.4. **Caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction φ.** Dans cette question, on admet que φ est continue sur $[0, +\infty[$, $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et φ' et φ'' sont les fonctions définies par : $\forall x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}\, dt$$

$$\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t)) e^{-xt}\, dt$$

I.4.1 Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.

I.4.2 Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

I.4.3 Expliciter $\varphi'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

I.5. **Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.**

I.5.1 déterminer la limite de $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.5.2 Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.5.3 Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0,+\infty[$.

I.5.4 Déterminer $\varphi(0)$.

2 Etude de l'existence de J_m.

II.1. **Etude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$.**
Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$ pour tout entier naturel non nul m.
Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\, dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2. **Etude de J_1.**
Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).

II.3. **Etude de l'existence de I_k.**
Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif I_k (on pourra utiliser une intégration par parties).

II.4. **Etude de la nature de J_m.**
Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ et tout entier relatif k, on note : $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{e^{ikt}}{t}\, dt$.

II.4.1 Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

II.4.2 En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p.

II.4.3 Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t}\, dt$ pour p entier naturel non nul ?