Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 10 Décembre 2022
(Durée : 4 heures)

Documents, calculatrice et portables interdits

Niveau Centrale

Problème 1

Q1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Q2. On note $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$, pour $n\in\mathbb{N}$.

(a) Justifier l'existence de J_n.

(b) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

(c) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire : $\begin{cases} J_n - J_{n-2} = 0 & \text{si n est impair} \\ J_n - J_{n-2} = \frac{2}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si n est pair} \end{cases}$

(d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0$ et en déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

(e) Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Q3.

(a) Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}$.

(b) Soit $a\in\,]0,\pi[$. Prouver que l'application f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ pour $x\neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$.

(c) Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right)$ lorsque $a\in\,]0,\pi[$.

(d) En déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $a = \dfrac{\pi}{2}$, $a < \dfrac{\pi}{2}$ et $a > \dfrac{\pi}{2}$.

Q4. En utilisant les résultats précédents et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, montrer que la fonction F : $X\mapsto \displaystyle\int_0^X \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet $\dfrac{\pi}{2}$ pour limite lorsque X tend vers $+\infty$.

Q5. En utilisant $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t$, montrer que l'application $\left[t\mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\right]$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Problème 2

Notations et définitions

— soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;

— $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;

— $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, et $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$;

— on note I_p la matrice identité de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0 ;

— on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;

— étant donnée une matrice $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

On considère une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

Q1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Q2. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \displaystyle\max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q3. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ sont réelles.

Q4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$.

Q5. En utilisant la question **Q4**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q6. Établir, pour $n \geqslant 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.

En déduire, pour $n \geqslant 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

Q7. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$:

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q8. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1,n]\!]\right\}$.

Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1,n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

Q9. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q10. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.

Q11. Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q12. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

Q13. En déduire, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II – Spectre de matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

Q14. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

Q15. Montrer

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

dans le cas où D est inversible.

On admet que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

Q16. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

Q17. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q18. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.