Correction du DS4 de mathématiques, proposé le 9/1

Exercice n° 1

Question 1 : Résoudre le système linéaire $\mathcal{S}$: $\left\{\begin{array}{r} 5x+3y-z=2 \\ -2x+2y+3z=7 \\ 4x+12y+7z=5 \end{array}\right.$.

On travaille avec la matrices augmentée du système et on fait des opérations sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 12 & 7 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & -8 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 12 & 7 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & -8 & -3 \\ 0 & -16 & -13 & 1 \\ 0 & 48 & 39 & 17 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & -8 & -3 \\ 0 & -16 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

Avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ ainsi que $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et enfin $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$.

On en déduit que $\mathcal{S}$ est équivalent à un système qui contient l'équation $0x + 0y + 0z = -20 \Leftrightarrow 0 = -20$ donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est incompatible}}$.

Question 2 : Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + 2y' + y = t$ avec les conditions $\left\{\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{array}\right.$.

On a à résoudre une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, avec une condition initiale. Procédons par étapes :

Résolution de l'équation homogène : l'équation caractéristique est

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Longleftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow r = -1$$

La solution de l'équation homogène est donc $\mathcal{S}_h = \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}(at+b)\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Recherche de solution particulière : on cherche une solution particulère affine, c'est-à-dire de la forme $f(t) = \alpha t + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. f est solution de (E) si, et seulement si :

$$f'' + 2f' + f = t \Longleftrightarrow 2\alpha + \alpha t + \beta = t \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{array}\right.$$

Finalement, $f(t) = t - 2$ est solution particulière de (E).

Résolution de l'équation complète : d'après ce qui a été fait précédemment, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}(at+b) + t - 2\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Conditions initiales : soit un élément $y \in \mathcal{S}$ c'est-à-dire $y(t) = \mathrm{e}^{-t}(at+b) + t - 2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $y(0) = b - 2$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = \mathrm{e}^{-t}(-at - b + a) + 1$ donc $y'(0) = a - b + 1$.
Il suit que y vérifie les conditions initiales si, et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b-2=1 \\ a-b+1=2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=3 \\ a=4 \end{array}\right.$$

Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ qui vérifie les conditions initiales est } y(t) = \mathrm{e}^{-t}(4t+3) + t - 2}$

Question 3 : Discuter, en fonction du réel α, le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{x^2}{x-2} = \alpha$.

Soit, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$. On va dresser le tableau de variations complet de f.

Etude des limites de f aux bornes de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$:
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2,0\}, f(x) = \frac{x}{1-\frac{2}{x}}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to2} x^2 = 4$ et $\lim\limits_{x\to2^-} x - 2 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$. De façon analogue, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.

Etude des variations de f et construction du tableau de variations :
f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ f'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(0)=0$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(4)=8$	↗	$+\infty$

Utilisation du Théorème des Valeurs Intermédiaires et conclusion :
f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et donc le TVI s'applique. D'après le tableau de variations construit,

l'équation $f(x) = \alpha$ admet :
- aucune solution si $\alpha \in]0;8[$;
- une unique solution si $\alpha \in \{0;8\}$;
- exactement deux solutions si $\alpha \in]-\infty;0[\cup]8;+\infty[$.

Question 4 : Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{X^4+X}{2X^3+5X^2+3X+2}$.

Division euclidienne de X^4+X par $2X^3+5X^2+3X+2$, utilisation dans la fraction rationnelle :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 & & & +X & & 2X^3+5X^2+3X+2 \\ \cline{7-7}
-(& X^4 & +\frac{5}{2}X^3 & +\frac{3}{2}X^2 & +X) & & \frac{1}{2}X-\frac{5}{4} \\ \cline{1-5}
 & & -\frac{5}{2}X^3 & -\frac{3}{2}X^2 & & & \\
-(& & -\frac{5}{2}X^3 & -\frac{25}{4}X^2 & -\frac{15}{4}X & -\frac{5}{2}) & \\ \cline{1-6}
 & & & \frac{19}{4}X^2 & +\frac{15}{4}X & +\frac{5}{2} &
\end{array}
$$

Finalement, $\underline{X^4+X = (2X^3+5X^2+3X+2)(\frac{1}{2}X-\frac{5}{4}) + \frac{19}{4}X^2 + \frac{15}{4}X + \frac{5}{2}}$.

Dans la fraction rationnelle, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{X^4+X}{2X^3+5X^2+3X+2} &= \frac{(2X^3+5X^2+3X+2)(\frac{1}{2}X-\frac{5}{4}) + \frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{2X^3+5X^2+3X+2} \\
&= \frac{1}{2}X - \frac{5}{4} + \frac{\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{2X^3+5X^2+3X+2}
\end{aligned}
$$

Ecriture de $2X^3+5X^2+3X+2$ en produit de facteurs irreductibles :
-2 est racine évidente de $2X^3+5X^2+3X+2$: $2(-2)^3+5(-2)^2+3(-2)+2 = -16+20-6+2 = 0$.
Il suit qu'on peut factoriser $2X^3+5X^2+3X+2$ par $X+2$ et après calculs (soit en posant la division, soit en résolvant un système), on a $\underline{2X^3+5X^2+3X+2 = (X+2)(2X^2+X+1)}$ qui est un produit de polynômes irreductibles sur $\mathbb{R}$ (le discriminant de $2X^2+X+1$ est $-7<0$).

Forme de la fraction rationnelle en éléments simples et recherche des coefficients :
D'après ce qui a été vu précédemment, on a :

$$\frac{X^4+X}{2X^3+5X^2+3X+2} = \frac{1}{2}X - \frac{5}{4} + \frac{\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{(X+2)(2X^2+X+1)}$$

Le cours nous assure qu'il existe un unique triplet de réels (a,b,c) tel que :

$$\frac{\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{(X+2)(2X^2+X+1)} = \frac{a}{X+2} + \frac{bX+c}{2X^2+X+1} \quad : (\star)$$

En multipliant $(\star)$ par $X+2$, $X=-2$ devient autorisé et on a alors : $\frac{19-\frac{15}{2}+\frac{5}{2}}{7} = a \Leftrightarrow \underline{a=2}$.

$(\star)$ devient $\frac{\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{(X+2)(2X^2+X+1)} = \frac{2}{X+2} + \frac{bX+c}{2X^2+X+1} \iff \frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2} = 2(2X^2+X+1)+(bX+c)(X+2)$.

On en déduit que b et c satisfont le système $\left\{\begin{array}{l} \frac{19}{4} = 4+b \\ \frac{15}{4} = 2+2b+c \\ \frac{5}{2} = 2+2c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{1}{4} \end{array}\right.$.

Conclusion :

$$\boxed{\frac{X^4+X}{2X^3+5X^2+3X+2} = \frac{1}{2}X - \frac{5}{4} + \frac{2}{X+2} + \frac{\frac{3}{4}X+\frac{1}{4}}{2X^2+X+1}}$$

Question 5 : On considère la fonction $f(x) = (\sin x)^x$.

a) Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi[$.

$f(x) = (\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}$ a du sens si, et seulement si, $\sin x > 0$ ce qui est le cas sur $]0;\pi[$. La fonction f est donc définie sur $]0;\pi[$.
$\boxed{\text{Par opérations sur les fonctions de classe } \mathcal{C}^\infty,\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0;\pi[}$.

b) Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? En π ?

En 0 **:** Pour $x \in]0;\pi[$ on a $x\ln(\sin x) = \frac{x}{\sin x} \times (\sin x)\ln(\sin x)$.
Or, on sait que $\lim\limits_{u\to 0^+} u\ln u = 0$. En posant $u = \sin x$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)\ln(\sin x) = 0$.
On sait également que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

Par opérations sur les limites, il vient :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \times (\sin x)\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x\to 0^+} (\sin x)\ln(\sin x) = 0$$

Par composition avec exp, il suit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
$\boxed{\text{On peut donc prolonger } f \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 1}$.

En π **:** on a $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sin x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\pi^-} \ln(\sin x) = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to\pi^-} x\ln(\sin x) = -\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = 0$ en composant avec exp.
$\boxed{\text{On peut donc prolonger } f \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant } f(\pi) = 0}$.

c) Si oui, le prolongement obtenu est-il dérivable ?

f est continue sur $[0;\pi]$ et dérivable sur $]0;\pi[$ avec :

$$\forall x \in]0;\pi[,\ f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\left(\ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}\right) = f(x) \times \left(\ln(\sin x) + \frac{x}{\sin x}\cos x\right)$$

En 0 **:** $f(x) \to 1$, $\frac{x}{\sin x} \to 1$, $\cos x \to 1$ et $\ln(\sin x) \to -\infty$. Il suit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.
$\boxed{\text{D'après le théorème de la limite de la dérivée, } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

En π **:** $f(x) \to 0$, $\frac{x}{\sin x}\cos x \to -\infty$, et $\ln(\sin x) \to -\infty$; on a une forme indéterminée. L'idée est que l'exponentielle dans $f(x)$ est plus puissante que les autres termes. On les traite séparément.

Pour $\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\ln(\sin x)$: pour $x \in]0;\pi[$ on a $0 < \sin x \leq 1$ et donc $\ln(\sin x) \leq 0$.
Il suit que, pour $1 \leq x \leq \pi$, $x\ln(\sin x) \leq \ln(\sin x)$. En composant avec exp qui est croissante, puis en multipliant par $\ln(\sin x)$ qui est négatif on a :

$$\forall x \in [1;\pi[,\ 0 \leq \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \leq \sin x \iff 0 \geq \ln(\sin x)\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \geq \ln(\sin x)\sin x$$

On sait que $\lim\limits_{u\to 0} u\ln u = 0$ donc, en posant $u = \sin x$ on a $\lim\limits_{x\to\pi^-} \ln(\sin x)\sin x = 0$ puis, par le théorème des Gendarmes $\lim\limits_{x\to\pi^-} \ln(\sin x)\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} = 0$.

Pour $\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\left(x\frac{\cos x}{\sin x}\right)$, on a lorsque $x \in [2;\pi]$, $0 \leq \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \leq \mathrm{e}^{2\ln(\sin x)} \iff 0 \leq \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \leq (\sin x)^2$. En multipliant par $x\frac{\cos x}{\sin x}$ qui est négatif, il vient :

$$\forall x \in [2;\pi], 0 \geq \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\frac{x\cos x}{\sin x} \geq \sin(x)x\cos x$$

Le théorème des Gendrames permet de conclure que $\lim_{x\to\pi^-} \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\dfrac{x\cos x}{\sin x} = 0$.

Par opérations, il suit que $\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 0$.

$\boxed{\text{D'après le théorème de la limite de la dérivée, } f \text{ est dérivable en } \pi \text{ et } f'(\pi) = 0.}$

Exercice n° 2

Proposition 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arccos} \circ \cos x = x$.
Faux. Par exemple, $\mathrm{Arccos} \circ \cos(2\pi) = \mathrm{Arccos}(1) = 0 \neq 2\pi$.
($\mathrm{Arccos} \circ \cos x = x$ est vrai uniquement pour $x \in [0;\pi]$).

Proposition 2 : Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré 2 est factorisable en produit de polynômes de degré 1.
Vrai. Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Soit δ une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On a vu que $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ sont des racines complexes (éventuellement confondues si δ est nul) de P. Il suit que $P = a(X - z_1)(X - z_2)$.

Proposition 3 : Un polynôme de degré 2 ayant ses racines qui sont conjuguées est à coefficients réels.
Faux. Par exemple $P = \mathrm{i}(X^2+1) = \mathrm{i}X^2 + \mathrm{i}$ a pour racines i et $-$i qui sont conjuguées alors que P n'est pas à coefficients réels.

Proposition 4 : Une suite qui tend vers $+\infty$ peut être décroissante.
Faux. Une suite décroissante est minorée par son premier terme, elle ne peut donc pas tendre vers $+\infty$.

Proposition 5 : Si la fonction f n'est pas monotone alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.
Faux. La fonction $f(x) = \cos(2\pi x)$ n'est pas monotone mais la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Proposition 6 : Une suite géométrique décroissante a une raison positive.
Vrai. Une suite géométrique ayant une raison négative n'est pas monotone, donc une suite géométrique décroissante (ça existe, par exemple $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$) a forcément une raison positive.

Proposition 7 : Si la fonction f est définie et continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule sur $]a;b[$.
Vrai. Il s'agit du Théorème des Valeurs Intermédiaires appliqué à l'équation $f(x) = 0$ sur $[a;b]$. La condition $f(a)f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont deux nombres non nuls de signes opposés.

Proposition 8 : Un système linéaire peut avoir exactement deux solutions.
Faux. On a vu qu'un système linéaire compatible admet une unique solution ou bien une infinité.

Proposition 9 : Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations ne peut pas avoir une unique solution.
Vrai. Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations est soit incompatible, soit compatible avec un rang inférieur ou égal au nombre d'équations et donc inférieur au nombre d'inconnues. Il y a donc au moins un paramètre et une infinité de solutions au système.

Proposition 10 : Il faut au moins n vecteurs pour avoir une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
Vrai. On écrit la matrice de la famille de vecteurs, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs. Elle a n lignes et autant de colonnes que la famille compte de vecteurs. Or, la famille est génératrice si, et seulement si, le rang de la matrice est n ; il faut donc au moins n vecteurs (puisque le nombre de colonnes majore le rang).

Problème

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble F qui regroupe toutes les fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation

$$(\star): \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \qquad \text{et} \quad f(0)\geq 0$$

I. Quelques propriétés de F.

1) Justifier que F est non vide.
$\boxed{\text{La fonction nulle vérifie } (\star)\text{, c'est donc un élément de } F \text{ qui est non vide.}}$

2) Prouver que $x\mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$ est dans F.
$\phi : x\mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\phi(x+y)\phi(x-y) = \mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{e}^{(x-y)^2} = \mathrm{e}^{(x+y)^2+(x-y)^2} = \mathrm{e}^{2(x^2+y^2)} = (\mathrm{e}^{x^2+y^2})^2 = (\phi(x)\phi(y))^2$$

$\boxed{\text{Finalement, } \phi \text{ est un élément de } F}$.

Dorénavant, f désigne un élément de F.

3) a) Ecrire ce que devient $(\star)$ dans chacun des cas suivants : $x=0$, $y=0$, $x=y$.
On obtient :
— $\forall y\in\mathbb{R},\ f(y)f(-y) = f(0)^2f(y)^2 \iff \boxed{f(y)(f(-y)-f(0)^2f(y)) = 0\ \ : (1)}$.
— $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)^2 = f(0)^2f(x)^2 \iff f(x)^2(1-f(0)^2) = 0 \iff \boxed{f(x)(1-f(0))(1+f(0)) = 0\ \ : (2)}$
— $\forall x\in\mathbb{R},\ \boxed{f(2x)f(0) = f(x)^4\ \ : (3)}$.

b) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
D'après la relation (2), on a $f(0)=1$, $f(0)=-1$ ou alors $\forall x,\ f(x)=0$ ce qui entraîne $f(0)=0$.
Or, on a $f(0)\geq 0$ ce qui exclut $f(0)=-1$. $\boxed{\text{Finalement, } f(0)\in\{0;1\}}$.

4) Montrer que $f(0)=0$ si, et seulement si, f est l'application nulle, notée $\widehat{0}$ dans la suite du problème.
Si $f=\widehat{0}$ alors $f(0)=0$.
Réciproquement, si $f(0)=0$ alors, (3) nous donne $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)^4 = 0 \iff f(x)=0$.
$\boxed{\text{Finalement, } f(0)=0 \text{ si, et seulement si, } f=\widehat{0}}$.

5) Supposons que f s'annule en $a\in\mathbb{R}^*$.

a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{2^n}$.
Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \tfrac{1}{2} \text{ elle converge donc vers } 0}$.

b) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n)=0$.
Pour $n=0$, on a $u_0=a$ et $f(a)=0$ par hypothèse.
Supposons que $f(u_n)=0$, montrons que $f(u_{n+1})=0$.
On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$. La relation (3) appliquée en $x=\frac{u_n}{2}$ donne $f(u_n)f(0) = f(u_{n+1})^4$. Par hypothèse de récurrence, $f(u_n)=0$ on en déduit $f(u_{n+1})=0$.
La propriété a été initialisée pour $n=0$, elle est héréditaire, on a donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n)=0}$.

c) En déduire la valeur de $f(0)$ puis la nature de f.
Par hypothèse, la fonction f est continue, on a donc : $\boxed{f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0}$.
D'après la question 4) $\boxed{f \text{ est alors la fonction nulle}}$.

6) On suppose que $f\neq\widehat{0}$. Que vaut $f(0)$? Prouver que f ne s'annule jamais puis que, pour tout réel x, $f(x)>0$. Montrer de plus que f est paire.
Si $f\neq\widehat{0}$ alors $\boxed{f(0)=1}$.
Si f s'annulait en a alors f serait nulle d'après ce qui a été vu précédemment, c'est donc absurde et $\boxed{f \text{ ne s'annule jamais}}$.
S'il existait $b\in\mathbb{R}$ tel que $f(b)<0$, comme on sait que $f(0)=1>0$ et que f est continue, le Théorème des Valeurs Intermédiaires nous donnerait l'existence de $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$ ce qui est exclu. On

a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0}$.
Dans la relation (1) : $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)(f(-y) - f(0)^2 f(y)) = 0$ on peut remplacer $f(0)$ par 1 et simplifier par $f(y)$ puisqu'on a vu qu'il est non nul. On obtient $\forall y \in \mathbb{R}, f(-y) = f(y)$. Autrement dit : $\boxed{f \text{ est paire}}$.

II. Explicitation des éléments de F.

Soit G, l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\exists f \in F \backslash \{\widehat{0}\} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \ln(f(x)).$$

1) Justifier que G n'est pas vide.
On a vu que ϕ est un élément non nul de F, $\boxed{\ln \circ\, \phi \text{ est donc un élément de } G \text{ qui n'est pas vide}}$.
<u>Dorénavant, g désigne un élément de G.</u>

2) Prouver que g vérifie la relation $(\star\star)$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$.
Soit $g \in G$, $f \in F\backslash\{\widehat{0}\}$ tel que $g = \ln \circ f$. f vérifie $(\star)$ et, d'après ce qu'on a vu, $f > 0$ donc il est possible d'appliquer ln à $(\star)$. On obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ln(f(x+y)f(x-y)) = \ln\left((f(x)f(y))^2\right) \iff g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y)) \ : (\star\star)$$

$\boxed{\text{Finalement, } g \text{ vérifie bien } (\star\star)}$.

3) Déterminer $g(0)$ et prouver que g est une fonction paire.
$f \in F\backslash\{\widehat{0}\}$ donc $f(0) = 1$ et $\boxed{g(0) = 0}$.
En prenant $x = 0$ dans $(\star\star)$ il vient : $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) + g(-y) = 2g(y) \iff g(-y) = g(y)$.
Autrement dit : $\boxed{g \text{ est paire}}$.

4) Prouver, à l'aide de $(\star\star)$ que g vérifie la relation $(\diamond)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = n^2 g(x)$.
On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, c'est évident car on sait que $g(0) = 0$. Pour $n = 1$, c'est aussi évident.
Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait, $\forall k \in [\![0;n]\!], g(kx) = k^2 g(x)$ (avec $n \geq 1$).
En modifiant (x,y) en (nx, x) dans $(\star\star)$ on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g((n+1)x) + g((n-1)x) = 2(g(nx) + g(x))$.
En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g((n+1)x) + (n-1)^2 g(x) = 2(n^2 g(x) + g(x)) \iff g((n+1)x) = (n+1)^2 g(x).$$

La propriété a été initialisée pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Finalement, $\boxed{g \text{ vérifie } (\diamond)}$.
Comprenez-vous pourquoi il fallait initialiser en $n = 0$ et $n = 1$?

5) Montrer que la relation $(\diamond)$ reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
Comme g est paire et vérifie $(\diamond)$ on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(-nx) = n^2 g(x) = (-n)^2 g(x)$. Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ g(nx) = n^2 g(x)}$.

6) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ g(rx) = r^2 g(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $g(rx) = g(p\frac{x}{q}) = p^2 g(\frac{x}{q})$: $(\clubsuit)$ d'après $(\diamond)$.
Or $g(x) = g(q \times \frac{x}{q}) = q^2 g(\frac{x}{q})$, d'après $(\diamond)$. On en déduit $g(\frac{x}{q}) = \frac{1}{q^2} g(x)$ et, dans $(\clubsuit)$, on obtient : $g(rx) = \frac{p^2}{q^2} g(x) \iff g(rx) = r^2 g(x)$. Finalement, $\boxed{\text{on a bien } \forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ g(rx) = r^2 g(x).}$

7) On pose $g(1) = \lambda$. Déduire de la question précédente que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = \lambda r^2$.
Il suffit d'appliquer la relation précédente avec $x = 1$ et on a $\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = r^2 g(1) = r^2 \lambda}$.

8) Prouver que, pour tout réel x, $g(x) = \lambda x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x (l'approximation décimale de x, par exemple). La fonction g est continue comme composée de fonctions continues, on a donc :

$$g(x) = \lim_{n \to +\infty} g(r_n) = \lim_{n \to +\infty} r_n^2 \lambda \boxed{= \lambda x^2}$$

9) En déduire F.
On a $g = \ln(f)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda x^2$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x^2}$.
Finalement, $\boxed{F = \{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x^2} / \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\widehat{0}\}}$

III. Etude du graphe d'un élément de F.

On considère $\lambda \in \mathbb{R}$ et la famille de fonctions $f_\lambda : x \mapsto e^{(\lambda x^2)}$.
On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par C_λ la courbe représentative de f_λ.

Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur C_λ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine. Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de $\lambda > 0$. Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie ?

Supposons $\lambda > 0$. La tangente à C_λ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ a pour équation $y = f'_\lambda(a)(x - a) + f_\lambda(a)$.
Elle passe par O si, et seulement si, $f_\lambda(a) = a f'_\lambda(a)$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'_\lambda(x) = 2\lambda x f_\lambda(x)$, la condition devient après division par $f_\lambda(a)$ (qui est non nul) : $2\lambda a^2 = 1$.
Il y a donc deux points répondant à la question :

$$A_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{\mathrm{e}} \right) \text{ et } B_\lambda \left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{\mathrm{e}} \right)$$

Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Lorsqu'on fait varier λ, ils décrivent la droite $y = \sqrt{\mathrm{e}}$ privée de $(0; \sqrt{\mathrm{e}})$.