Durée : 4h. Sujet e3a/CCINP
Toute affirmation doit être justifiée.

Les calculatrices sont **interdites** Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1 **Vrai ou Faux ? (6 min. max, pas de justification attendue)**

Q.1) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{-3/2}\,\mathrm{d}t$ converge ?

Q.2) $\dfrac{1}{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + t^2 + o(t^2)$?

Q.3) $\dfrac{\ln t}{\ln(1+t)} \underset{t\to +\infty}{=} O(1)$?

Q.4) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A^T = A) \Rightarrow A$ inversible ?

Q.5) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A^TA = I_n) \Rightarrow A$ inversible ?

Q.6) Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même déterminant ?

Problème 1

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.
On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs
On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.
On montre d'abord que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C, où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C, c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C.
On montre ensuite que $\det(I_n + C^2) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices symétriques réelles C.
On considère enfin le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}_+$.

La **Partie II** est plus générale.

I. Trois cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}$ et que :
$$\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1,$$
avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}$.
2. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à une matrice diagonale. Démontrer que :
$$\det(I_n + C^2) \geq 1,$$
avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})}$.
3. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :
$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$
En déduire que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}_+$ et que $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

II. Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$

2. Soient $(r,s,t,u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1,e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de ϕ dans la base (e_2,e_1).

3. Soit $(R,S,T,U) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

Problème 2

I - 0. Démontrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u$ converge .

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u$ vaut $K = \dfrac{\pi}{2}$ dans la suite.

Partie I : étude de quelques suites d'intégrales

I - 1. Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

I - 2. On considère ici une application continue $f\colon [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$.

I - 2.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

I - 2.2. On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$. On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.

I - 2.3. Application 1.

Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

I - 3. On considère maintenant que $f\colon [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

I - 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\mathrm{d}t$.

I - 3.2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

I - 4.

I - 4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et tout $A > 1$, on pose $C_n(A) = \int_1^A \sin(t^n)\mathrm{d}t$.

Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimer $C_n(A)$ en fonction de $\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}u$ et de A.

I - 4.2. En déduire que $C_n(A)$ a une limite quand $A \to +\infty$, prouvant l'existence de $\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

I - 4.3. Application 2.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\mathrm{d}t$ grâce à K calculée en **I-2.5**.

Partie II : étude de séries de fonctions

II - 1. Un premier exemple.

II - 1.1. Pour tout $x \in]-1,1[$, calculer $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

II - 1.2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$, $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$, $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)^2F'(x)$.

II - 2. Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1,1[$, on pose cette fois : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

II - 2.1. Soit $a \in]0,1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a,a]$. En déduire que F est définie et continue sur $]-1,1[$.

II - 2.2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.

En déduire $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$.

On pourra admettre que $\forall x \in]-1,1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et établir que $F(x) \geq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

II - 3. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0) = 0$ et telle que $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$.

II - 3.1. Justifier l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t)\mathrm{d}t$ et l'égalité $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.

II - 3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^n f(x^t)\mathrm{d}t.$$

II - 3.3. En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

II - 3.4. Conclure avec soin que $\lim\limits_{\substack{x<1\\x\to 1}}(1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.

II - 4. Un dernier exemple.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

II - 4.1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

II - 4.2. Grâce à **II-3.4**, montrer que $\lim\limits_{\substack{x<1\\x\to 1}}(1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\mathrm{d}u$ étudiée en **I-3.**

II - 4.3. Par une méthode similaire à celle de **II-3**, montrer que :

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}}\left((1-x)^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}\right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\mathrm{d}u.$$

En déduire $\lim\limits_{\substack{x<1\\x\to 1}}((1-x)^2F'(x))$.

Exercice 2

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right),$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Soit x réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{n+1}\right)$.

   En déduire que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Démontrer que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   On pourra montrer la convergence de la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ avant de conclure.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Montrer que φ est paire sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
   (b) Démontrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$.
   On pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(u)$.
   (b) En déduire l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.