Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

Dans tout l'exercice n est un entier naturel

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Le sous-espace $\mathrm{Im}(u)$ est-il stable par l'endomorphisme u ? Justifiez votre réponse.
2. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E par
$$u(e_1) = e_3,\ u(e_2) = e_4,\ u(e_3) = u(e_4) = 0$$
   (a) Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{rg}(u)$. A-t-on $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$?
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   (c) Ecrire dans une base de $\mathrm{Im}(u)$ la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes. Donner, en le justifiant, l'ordre de multiplicité de chacune de ces valeurs propres dans le polynôme caractéristique.

   On identifie le vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ et la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.
   On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $(X|Y) = {}^tXY$.
   M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on choisit un vecteur non nul $V_k \in E_k = \mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_n)$.
5. Montrer que ${}^tM$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et admet les mêmes valeurs propres que M.
   On choisit alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ un vecteur W_k non nul de $\mathrm{Ker}({}^tM - \lambda_k I_n)$.
6. Prouver que $\forall i \neq j,\ {}^tV_iW_j = 0$.
7. Démontrer que $\forall i,\ {}^tV_iW_i \neq 0$.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k = \dfrac{1}{{}^tV_kW_k}(V_k{}^tW_k)$.
8. <u>Exemple</u> : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que A possède deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 telles que $\lambda_1 < \lambda_2$.
   Déterminer les matrices $B_1 + B_2$ et $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.
9. **On revient au cas général**
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le rang de B_k. Calculer B_k^2. La matrice B_k est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
10. Déterminer $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$.
11. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer $G_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^r B_k$.

Exercice 2

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \longmapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

12. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient de A. Justifier :
   $$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i).$$
   (b) En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.
13. Montrer que l'entier n est un nombre pair.
   Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice A.
14. On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.
15. Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.
16. On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.
   (a) Montrer que la dimension de F est égale à 2.
   (b) Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.
   (c) Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
   Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \dfrac{1}{\| x \|}x$ *et* $e'_2 = \dfrac{1}{a \| x \|}u(x)$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).
17. On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).
   Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$" de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :
   $$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Objectifs

On considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)} \mathrm{d}t.$$

18. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

    Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

19. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.
20. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.
21. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.
22. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

    La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

    On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-ikx)}.$$

23. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.
24. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p} \mathrm{e}^{-p}$.
25. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

    La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?