

**Durée : 3h.** Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être **encadré** voire **souligné**

- 3h (objectif *Centrale*)

## I. Notations, préliminaires

### Notations

Pour  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , on note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients réels ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels ;
- $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;
- $O_n(\mathbb{R})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices orthogonales ;
- $S_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques ;
- $A^T$  la transposée de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;
- $\text{tr}(A)$  la trace de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;

- $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;

- $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels ;
- $\chi_A$  le polynôme caractéristique de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;
- $E_{i,j}^{(n,p)}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  qui a tous ses coefficients nuls sauf le coefficient situé sur la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne qui vaut 1. Lorsque  $n = p$ , on simplifie l'écriture en notant  $E_{i,j}^{(n)}$  la matrice  $E_{i,j}^{(n,n)}$ .

On identifie  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , ensemble des matrices à  $n$  lignes et 1 colonne.

On admet que  $(E_{i,j}^{(n,p)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Mis à part les questions 31 et 38, les parties I, II et III sont indépendantes. Dans la partie III, les questions 34, 35, 36 et 37 sont indépendantes de ce qui précède. La partie IV dépend fortement des parties II et III.

On admet le résultat suivant :

lemme I-D

Pour tout polynôme unitaire  $P = X^p + \sum_{k=1}^p a_k X^{k-1}$ , avec  $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $P$  est le polynôme caractéristique de la matrice "compagnon" :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix}$$

## II. Matrices symétriques positives

Dans cette partie, on considère un entier naturel  $n$  non nul. On rappelle que la norme euclidienne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est définie par  $\|X\| = \sqrt{X^T X}$  où  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , en particulier  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T X \geq 0$ .

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , une matrice réelle symétrique. On dit que  $A$  est positive si pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$ .

### II.A -

**Q 13.** Montrer que si  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{+2}$  et si  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\lambda A + \mu B$  est une matrice symétrique positive.

**Q 14.** Montrer que si  $A$  est une matrice symétrique positive, alors  $A^T$  l'est aussi.

**II.B -** On considère une matrice symétrique positive  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q 15.** Justifier qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$$

**Q 16.** On considère  $i \in \{1, \dots, n\}$  et un vecteur propre  $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de  $A$  associé à  $\lambda_i$ . Montrer que

$$\lambda_i \|X_i\|^2 = X_i^T A X_i$$

**Q 17.** En déduire que les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $A$  sont toutes positives.

**Q 18.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  une matrice symétrique positive de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $a + c \geq 0$  et  $ac - b^2 \geq 0$ .

**II.C -** Réciproquement, on considère une matrice symétrique  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont toutes les valeurs propres sont positives. Il existe alors une matrice  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et des réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$$

**Q 19.** On considère  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $X' = P^T X$ . On note  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ , montrer que

$$X^T A X = X'^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2$$

**Q 20.** En déduire que  $A$  est une matrice symétrique positive.

**Q 21.** Montrer que si  $A$  est une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $A$  est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

**II.D -** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q 22.** On suppose qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^T B$ . Montrer que  $A$  est symétrique positive.

**Q 23.** Réciproquement, on suppose que  $A$  est une matrice symétrique positive. En utilisant la sous-partie II.B, montrer qu'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^T B$ .

### III. Produits de Kronecker

Soient  $n, n', p, p'$ , des entiers  $\geq 1$ . Pour  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'} \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ , on définit le produit de Kronecker (ou produit tensoriel) de  $A$  et  $B$  noté  $A \otimes B$  par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n'}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np, n'p'}(\mathbb{R})$$

Par exemple dans le cas  $n = n' = p = p' = 2$  on a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,1}\beta & a_{1,2}\alpha & a_{1,2}\beta \\ a_{1,1}\gamma & a_{1,1}\delta & a_{1,2}\gamma & a_{1,2}\delta \\ a_{2,1}\alpha & a_{2,1}\beta & a_{2,2}\alpha & a_{2,2}\beta \\ a_{2,1}\gamma & a_{2,1}\delta & a_{2,2}\gamma & a_{2,2}\delta \end{pmatrix}$$

**III.A** – On considère  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Q 24.** Calculer  $A \otimes B$  et  $X \otimes Y$ .

**Q 25.** Justifier sans calcul que la matrice  $A \otimes B$  est diagonalisable.

**Q 26.** Vérifier que  $X$  est un vecteur propre de  $A$ , que  $Y$  est un vecteur propre de  $B$  et que  $X \otimes Y$  est un vecteur propre de  $A \otimes B$ .

**III.B** – Dans cette sous-partie uniquement, on énonce des propriétés vraies pour tous  $n, n', p, p' \in \mathbb{N}^*$ , et on demande de faire les preuves seulement dans le cas où  $n = n' = p = p' = 2$ .

**Q 27.** Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ ,  $A' \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$  montrer que

$$(\alpha A + A') \otimes B = \alpha A \otimes B + A' \otimes B \tag{III.1}$$

Dans la suite du problème, on admettra que si de plus  $B' \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$  alors

$$A \otimes (\alpha B + B') = \alpha A \otimes B + A \otimes B' \tag{III.2}$$

**Q 28.** Si  $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$  montrer que  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ . En déduire que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  sont symétriques alors  $A \otimes B$  est symétrique.

**Q 29.** Pour toutes matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  démontrer que  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ .

Dans la suite du problème, on admettra que si  $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ ,  $A' \in \mathcal{M}_{n',n''}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$  et  $B' \in \mathcal{M}_{p',p''}(\mathbb{R})$  alors

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB') \tag{III.3}$$

**III.C** – On revient au cas général où  $n$  est un entier naturel non nul et on considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre de  $A$  associée à  $\lambda$ ,  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $\mu$  une valeur propre de  $B$  et  $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre de  $B$  associée à  $\mu$ .

**Q 30.** Montrer que  $X \otimes Y$  est un vecteur propre de  $A \otimes B$  et que  $\lambda\mu$  est une valeur propre de  $A \otimes B$ .

**Q 31.** Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont des matrices symétriques positives montrer que  $A \otimes B$  est une matrice symétrique positive de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ . On pourra utiliser les résultats des questions 22 et 23 ainsi que l'égalité (III.3).

**III.D** – On considère la base  $(E_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pourra aussi utiliser la base  $(E_{i,j}^{(n^2)})_{1 \leq i, j \leq n^2}$  de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ .

**Q 32.** On suppose dans cette question que  $n = 2$ . Calculer  $E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)}$  et plus généralement les 16 produits tensoriels  $E_{i,j}^{(2)} \otimes E_{k,l}^{(2)}$ .

**Q 33.** Si  $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$  exprimer  $E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{k,l}^{(n)}$  en fonctions d'éléments de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ .

On admet dans la suite du problème que la famille des  $n^4$  produits tensoriels  $(E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{k,l}^{(n)})$  pour  $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$  est une base de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ .

On note  $\tau_2$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$  vérifiant  $\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4 \tau_2(E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{k,l}^{(n)}) = E_{i,j}^{(n)} \otimes (E_{k,l}^{(n)})^\top$ .

**Q 34.** Montrer que  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \tau_2(A \otimes B) = A \otimes B^\top$ .

### III.E – Application aux entiers algébriques

On dit qu'un nombre complexe  $\alpha \in \mathbb{C}$  est un entier algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire  $P$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire tel que  $P(\alpha) = 0$ .

**Q 35.** Démontrer que tout élément  $\alpha \in \mathbb{Z}$  est un entier algébrique.

**Q 36.** Montrer que  $i$  et  $\sqrt{2}$  sont des entiers algébriques.

**Q 37.** Prouver que le nombre d'or  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  est un entier algébrique.

On admet que le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est lui-même à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

**Q 38.** En utilisant la sous-partie I.D et la question 30, montrer que le produit  $\alpha\beta$  de deux entiers algébriques  $\alpha$  et  $\beta$  est un entier algébrique.

## IV. États quantiques de Werner

Dans cette partie, on étudie certains états quantiques introduits par le physicien Reinhard Werner en 1989. Chaque état de Werner représente l'état quantique d'un système à deux particules. Actuellement, ces thèmes sont au cœur de la physique contemporaine et font l'objet d'intenses recherches.

Soit  $N \geq 1$  un entier. On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un état quantique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si  $\text{tr}(A) = 1$  et si  $A$  est une matrice symétrique positive. On note  $\mathcal{Q}_N$  l'ensemble des états quantiques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques positives de trace 1 de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

**Q 39.** Si  $(A, B) \in (\mathcal{Q}_N)^2$  montrer que  $\forall t \in [0, 1], tA + (1-t)B \in \mathcal{Q}_N$ . On dit que  $\mathcal{Q}_N$  est un ensemble convexe.

**Q 40.** On suppose que  $m$  est un entier naturel non nul. Montrer que si,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, A_i \in \mathcal{Q}_n, B_i \in \mathcal{Q}_n, p_i \in \mathbb{R}^+$  et si  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$  alors  $\sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i \in \mathcal{Q}_{n^2}$ .

Un état quantique  $C \in \mathcal{Q}_{n^2}$  est dit séparable si on peut l'écrire sous la forme

$$C = \sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i$$

pour un certain entier naturel  $m$ , des états quantiques  $A_i$  et  $B_i$  de  $\mathcal{Q}_n$  et des réels  $p_i \geq 0$  vérifiant  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ .

**Q 41.** Montrer que si un état  $C$  de  $\mathcal{Q}_{n^2}$  est séparable alors la matrice  $\tau_2(C)$  est symétrique positive (l'application  $\tau_2$  a été définie dans la sous-partie III.D).

On définit la matrice ligne  $\Psi$  de  $\mathcal{M}_{1, n^2}(\mathbb{R})$  par

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_{1,i}^{(1,n)} \otimes E_{1,i}^{(1,n)}$$

**Q 42.** Calculer le produit  $\Psi^T \Psi$ .

**Q 43.** Montrer que  $\Psi^T \Psi$  est un état quantique de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ .

On suppose dans la suite que  $n = 2$ .

**Q 44.** Préciser la matrice  $\Psi^T \Psi$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

Soit  $0 \leq p \leq 1$ . On définit la matrice  $W_p = p\Psi^T \Psi + (1-p)\frac{1}{4}I_4$ .

**Q 45.** Montrer que  $W_p$  est un état quantique de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . On l'appelle état quantique de Werner.

**Q 46.** Expliciter la matrice  $W_p$ .

**Q 47.** Expliciter la matrice  $\tau_2(W_p)$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et calculer ses valeurs propres.

**Q 48.** En utilisant la question 41, démontrer qu'il existe un intervalle  $I$  inclus dans  $[0, 1]$  tel que  $\forall p \in I, W_p$  n'est pas séparable.

Ce résultat traduit que, pour les valeurs de  $p$  dans cet intervalle, l'état quantique des deux particules est global, on ne peut pas le décrire en séparant les particules l'une de l'autre.