Correction du DS5 de mathématiques, proposé le 30/1

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Discuter, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$.
(On pourra prendre un ou deux exemples pour commencer).

Pour $\alpha = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n = 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Pour $\alpha = 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

On voit qu'il y a plusieurs cas à traiter :

— Si $\alpha < 0$: alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n = +\infty$.

— Si $\alpha = 0$: on a vu $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n = +\infty$.

— Si $\alpha > 0$: alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On écrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n^\alpha})} = \exp\left(\frac{n}{n^\alpha}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^\alpha})}{\frac{1}{n^\alpha}}\right) = \exp\left(n^{1-\alpha}\times\frac{\ln(1+\frac{1}{n^\alpha})}{\frac{1}{n^\alpha}}\right)$$

On sait que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^\alpha})}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0 \\ 1 & \text{si } 1-\alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 1-\alpha < 0\end{cases}$.

Par composition avec exp, on conclut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \mathrm{e} & \text{si } \alpha = 1 \\ 1 & \text{si } \alpha > 1\end{cases}}$$

Question 2 : Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$?

Tout d'abord, une application strictement croissante est injective et donc si $n > p$ alors il n'y a pas d'application strictement croissante de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$. Supposons donc $n \leq p$.
Une application f strictement croissante de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ est définie par la donnée de

$$1 \leq f(1) < f(2) < \cdots < f(n) \leq p.$$

Il y a donc autant de telles applications que de parties de $[\![1;p]\!]$ à n éléments c'est-à-dire $\binom{p}{n}$. Puisque $\binom{p}{n} = 0$ lorsque $n > p$, cette formule est valable dans tous les cas.
Finalement, $\boxed{\text{il y a } \binom{p}{n} \text{ applications strictement croissantes de } [\![1;n]\!] \text{ dans } [\![1;p]\!]}$.

Question 3 : déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, on n'a donc pas de division euclidienne à poser.
Le dénominateur est déjà sous la forme d'un produit de facteurs irréductibles, on en déduit qu'il existe un unique quadruplet de réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tel que :

$$\frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2+1} \ : (\star)$$

En multipliant les deux membres de $(\star)$ par $(X+1)^2$ puis en évaluant en $X = -1$, on obtient $\underline{\beta = -\frac{1}{2}}$.

On a donc

$$\frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{\alpha}{X+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{(X+1)^2}+\frac{\gamma X+\delta}{X^2+1} \iff X = \alpha(X+1)(X^2+1)-\frac{1}{2}(X^2+1)+(\gamma X+\delta)(X+1)^2$$

En identifiants les coefficients on a $\left\{\begin{array}{l} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha-\frac{1}{2}+2\gamma+\delta=0 \\ \alpha+\gamma+2\delta=1 \\ \alpha-\frac{1}{2}+\delta=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} \alpha+ & \gamma & & =0 \\ \alpha+ & 2\gamma+ & \delta & =\frac{1}{2} \\ \alpha+ & \gamma+ & 2\delta & =1 \\ \alpha+ & & \delta & =\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

On travaille avec la matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Finalement, la solution du système est $(\alpha,\gamma,\delta)=(0,0,\frac{1}{2})$ et : $\boxed{\frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(X+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{X^2+1}}$

Question 4 : Pour $n \geq 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la valeur exacte de I_2.

Soit $n \geq 1$, on intègre I_n par parties en posant $\left\{\begin{array}{l} u'=1 \\ v=\frac{1}{(1+x^2)^n} \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} u=x \\ v'=\frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \end{array}\right.$. On a :

$$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}+2n\int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}+2n(I_n-I_{n+1})$$

On a donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (2n-1)I_n+\frac{1}{2^n}=2nI_{n+1} \iff \boxed{I_{n+1}=(1-\frac{1}{2n})I_n+\frac{1}{n2^{n+1}}}$.

Comme $I_1=[\text{Arctan } x]_0^1=\frac{\pi}{4}$, on déduit $=(1-\frac{1}{2})I_1+\frac{1}{2^3}\boxed{=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}$.

Problème

L'objectif de ce problème est de s'intéresser, à travers l'exemple de la matrice $A=\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, à la notion de **commutant** d'une matrice carrée.

Dans la première partie, on observe quelques propriétés de A, dans la seconde (qui est indépendante de la première) on définit le commutant d'une matrice carrée et on en établit des propriétés. Dans la dernière partie, largement indépendante de la deuxième, on détermine le commutant de A.

I. Quelques propriétés de A.

On pose $P=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
On procède en échelonnant et en réduisant la matrice augmentée d'une colonne B et on obtient après calculs $(P|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -b_1-b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1+b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -b_1-2b_3 \end{array}\right)$.

$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible et que } P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$.

(b) Montrer que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{On calcule et on vérifie } P^{-1}AP = D}$.

(c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n. En déduire la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il suit que, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Après calculs : $\boxed{\forall n > 0,\ A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n & 0 & 2((-3)^n - 1) \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}}$.

II. Commutant d'une matrice carrée.

Définition :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle **commutant de** B et on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B. Autrement dit :

$$C(B) \ = \ \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ BM = MB\}$$

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que $C(B)$ est non vide.

$\boxed{\text{La matrice nulle est dans } C(B) \text{ donc } C(B) \text{ est non vide}}$.

(b) Montrer que $C(B)$ est stable par combinaison linéaire, autrement dit :

$$\forall (M, M') \in C(B),\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda M + \mu M' \in C(B).$$

Soit M et M' deux matrices de $C(B)$, λ et μ deux réels. On a :

$$(\lambda M + \mu M')B = \lambda MB + \mu M'B = \lambda BM + \mu BM' = B(\lambda M + \mu M')$$

On en déduit que $\lambda M + \mu M'$ est dans $C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ est stable par combinaison linéaire}}$.

(c) Montrer que $C(B)$ est stable par produit, autrement dit : $\forall (M, M') \in C(B),\ MM' \in C(B)$.
Soit M et M' deux matrices de $C(B)$. On a :

$$MM'B = M(M'B) = MBM' = (MB)M' = BMM'$$

On en déduit que MM' est dans $C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ est stable par produit}}$.

(d) Montrer que $C(B)$ contient au moins une matrice inversible.
I_n est dans $C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ contient au moins une matrice inversible}}$.

(e) Montrer que si $M \in C(B)$ est inversible, alors $M^{-1} \in C(B)$.
Soit M une matrice inversible de $C(B)$ (c'est légitime d'après la question précédente), on a :

$$\begin{aligned} MB = BM &\iff M^{-1}MB = M^{-1}BM \\ &\iff B = M^{-1}BM \\ &\iff BM^{-1} = M^{-1}BMM^{-1} \\ &\iff BM^{-1} = M^{-1}B \end{aligned}$$

On en déduit que $M^{-1} \in C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ est stable par passage à l'inverse}}$.

(f) $C(B)$ est-il stable par transposition ?
Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Clairement, $B \in C(B)$ (c'est vrai pour toute matrice). On calcule et on observe que ${}^tBB \neq B{}^tB$ et dont ${}^tB$ n'est pas dans $C(B)$.

$\boxed{\text{Finalement, } C(B) \text{ n'est pas stable par transposition}}$.

III. Commutant de la matrice A.

(a) Prouver que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a :

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(D)$$

Procédons par équivalence. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\iff MA = AM \\ &\iff MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \\ &\iff P^{-1}MPD = DP^{-1}P \\ &\iff P^{-1}MP \in C(D) \end{aligned}$$

(b) Montrer que $C(D)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \gamma & b & c \\ \delta & d & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

On calcule DM et MD et on a $M \in C(D)$ si, et seulement si $DM = MD$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -3a & -3\alpha & -3\beta \\ \gamma & b & c \\ \delta & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & \alpha & \beta \\ -3\gamma & b & c \\ -3\delta & d & e \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = -3\alpha \\ \beta = -3\beta \\ \gamma = -3\gamma \\ \delta = -3\delta \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Finalement, $\boxed{C(D) \text{ est l'ensemble des matrices de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4.}$

(c) En déduire que les matrices de $C(A)$ sont les combinaisons linéaires de cinq matrices que l'on précisera.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la question (a), $M \in C(A)$ si, et seulement si, $P^{-1}MP \in C(D)$, c'est-à-dire si, et seulement si $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$. En utilisant les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a donc :

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} + dE_{3,2} + eE_{3,3}$$

En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P on obtient :

$$M \in C(A) \iff M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{2,3}P^{-1} + dPE_{3,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1}$$

Finalement, $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})}$.