Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

On pose, lorsque cela est possible $\quad f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t^2-1}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.
3. Calculer $f(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi\ :\ u>0\mapsto \mathrm{ch}(u)$.
4. Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x\mapsto\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x\mapsto\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
5. Vérifier que f est positive sur I.
6. Montrer que f est décroissante sur I.
7. Prouver que f est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.
8. Soit $x\in I$. Démontrer la relation
$$f(x+2)=\frac{x}{x+1}f(x)$$
On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.
9. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.
10. Pour tout réel $x>0$, on pose
$$\varphi(x)=xf(x)f(x+1)$$
Prouver que $\varphi(x+1)=\varphi(x)$. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
11. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x\to0^+$.
12. Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ f(n)f(n+1)=\dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que
$$f(n)\underset{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
13. En utilisant des parties entières, prouver que
$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$
14. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
15. Prouver que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Problème 1

Pour tous entiers strictement positifs n, p, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Pour une matrice A, A^T désigne sa matrice transposée

Partie I

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Déterminer une relation entre A^2, A et I_n.
   En déduire une relation entre A^{n+1}, A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$.
4. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

   qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} &= v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Partie II

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \tag{1}$$
$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \tag{2}$$
$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \tag{3}$$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
   En déduire que

$$A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A.$$

2. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,
$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu) f^p(x) - f^{p+1}(x).$$
   (c) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.
   (d) Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

Partie III

On se donne toujours un entier $n \geq 1$ fixé.

Soit U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

On suppose U et V non nulles. Soit a un réel et A la matrice définie par
$$A = aI_n + UV^T.$$

1. Montrer que $V^T\,U$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.
2. Montrer qu'il existe un réel k tel que $\left(UV^T\right)^2 = k\left(UV^T\right)$.
   En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.
3. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
   En déduire que $\operatorname{Tr}(A) = na + V^T U$.
4. Exprimer α et β en fonction de a et de $\operatorname{Tr}(A)$.
5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.
   En déduire que λ vérifie l'équation
   $$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.$$
6. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont
   $$\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \operatorname{Tr}(A) - (n-1)\,a.$$
7. On suppose que $\operatorname{Tr}\left(UV^T\right) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par
   $$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = \lambda_i X\}.$$
   (a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
   (b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.
   (c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
8. Montrer que la matrice A de la première partie est de ce type.