Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 2 \text{ et } |x - y| \leq 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathcal{D}$.
   (a) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ les quatre droites d'équations $x + y = 2$, $x + y = -2$, $x - y = 2$ et $x - y = -2$. Sur la figure, indiquer l'ensemble $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que si (x, y) appartient à $\mathcal{D}$, alors $(x, -y)$ appartient encore à $\mathcal{D}$. Quelle symétrie possède l'ensemble $\mathcal{D}$?
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ possède une symétrie centrale que l'on déterminera.
   (d) Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $\mathcal{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble $\mathcal{D}$.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{O} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 2 \text{ et } |x - y| < 2\right\}.$$

   (a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ de f en tout point (x, y) de $\mathcal{O}$.
   (b) Montrer que $(1, 0)$ est l'unique point critique de la fonction f dans $\mathcal{O}$.
   (c) Sans calculer les deux dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, montrer qu'elles sont néanmoins égales pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$. Vous utiliserez un théorème bien choisi que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses.
   (d) Pour $(x, y) \in \mathcal{O}$, donner une expression des dérives partielles secondes notées

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

   (e) Donner les valeurs de r, s et t au point$(1, 0)$, puis montrer qu' au point $(1, 0)$, la fonction $rt - s^2$ s'annule.
   (f) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \longmapsto \ln(1 + u)$.
   (g) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \longmapsto f(1 + t, 0) - f(1, 0)$ au voisinage de 0. Le point critique $(1, 0)$ est-il un extremum local de f ?

Problème 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k(1-t)^{n-k}.$$

On propose d'étudier quelques aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques de cette famille de polynômes appelés "polynômes de Bernstein".
Dans la partie 1, on s'intéresse à deux endomorphismes φ_n et B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les propriétés sont liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La loi binomiale permet de faire le lien avec l'endomorphisme B_n dont on étudie en détail la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$. On étudie, dans la partie 2, les aspects analytiques de $B_n(f)$ pour une fonction f définie sur $[0, 1]$Par l'usage des probabilité, on obtient une démonstration "naturelle" de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0, 1]$ sous l'hypothèse forte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. La partie 3 complète la partie 2 par l'étude d'intégrales impropres et d'intégrales à paramètres. La partie 4 aborde la question des séries de fonctions liées aux polynômes de Bernstein.
La partie 5 est indépendante des autres parties. La partie 2 dépend seulement de la partie 1 et cela uniquement pour la question 5 faisant intervenir les probabilités. La partie 3 dépend seulement de la partie 2 et uniquement par la question 11.d).

PARTIE 1. ALGEBRE LINEAIRE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour $P(X)$ un polynôme réel, on note $P'(X)$ le polynôme dérivé.
On note $\mathcal{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), ..., p_{n,n}(X))$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $B_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

et

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

4.

4.a) Montrer que φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k\, p_{k,n}(X)$.

4.c) En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n est diagonalisable.

4.d) Montrer que φ_n n'est pas bijectif et que B_n est bijectif.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et T_r une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$. On note $\overline{T_r} = T_r/r$.
Pour Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y)$ l'espérance de Y et $V(Y)$ la variance de Y.
On rappelle que si $Y(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$ et h est une fonction à valeurs réelles définie sur $[\![0, r]\!]$, alors $h(Y)$ admet une espérance et $E(h(Y)) = \sum_{k=0}^{r} h(k)\mathbf{P}(Y = k)$.

5.a) Donner un exemple de situation probabiliste qui peut être décrite par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r,t)$.

5.b) Donner $T_r(\Omega)$ et justifier que, pour tout $k \in [\![0,r]\!]$, on a $P(T_r = k) = p_{k,r}(t)$.

5.c) Donner l'expression simplifiée des quantités suivantes :

$$E(T_r),\ E(\overline{T_r}),\ V(T_r), V(\overline{T_r}),\ E(T_r^2) \text{ et } E((\overline{T_r})^2);$$

vérifier en particulier que $E((\overline{T_r})^2) = \dfrac{t}{r} + \dfrac{t^2}{r}(r-1)$.

5.d) En déduire que les égalités suivantes sont valables pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t \quad \text{et} \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t.$$

5.e) Montrer que les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est stable par B_n.

On note $\widetilde{B_n}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\widetilde{B_n}(P) = B_n(P)$. On note A_n la matrice de $\widetilde{B_n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On note aussi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$

7. Montrer que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) I_3 + \dfrac{1}{n} H.$

88.a) La matrice H est-elle diagonalisable ?

8.b) Soit a et b deux réels et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible.

8.c) Déterminer (sans chercher à calculer Q^{-1}) deux réels a et b tels que $H = QDQ^{-1}$.

9. On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels a et b ont été choisis de telle sorte que $H = QDQ^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Si une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notée (M_ℓ), converge vers une matrice M, on note $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$. On admet alors que $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on a : $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell)_{i,j} = M_{i,j}$.

9.a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n) = I_3$

9.b) Montrer que l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est linéaire.

9.c) En déduire que si $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$, alors, $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}$.

9.d) Montrer que $A_n = QD_nQ^{-1}$.

9.e) Déterminer explicitement, pour $n \geq 2$, $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (A_n^\ell)$.

9.f) Déterminer explicitement $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n^n)$.

PARTIE 2. ANALYSE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = E(f(t) - f(\overline{T_n})) = \sum_{k=0}^{n} (f(t) - f(k/n)) p_{k,n}(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration les résultats de cette question 5.

10.

10.a) Montrer que pour toute variable aléatoire discrète Y admettant une variance, on a l'inégalité suivante : $E(Y) \leq \sqrt{E(Y^2)}$.

10.b) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $E\left(|t - \overline{T_n}|\right) \leq \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}$.

11. On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

11.a) Justifier l'existence d'un réel M_f tel que : $\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $|f(a) - f(b)| \leq M_f |a-b|$.
Dans toute la suite de cette question, on suppose que M_f est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |f(a) - f(b)| \leq M_f |a-b|.$$

11.b) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq M_f \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}$.

11.c) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \dfrac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

11.d) Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

PARTIE 3. INTEGRALES

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On reprend les notations de la partie 3 pour $B_n(f)$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat de la question 11.d).

12. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) \mathrm{d}x \right) = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$.

13. On note $S_n(f) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

13.a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x = \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\mathrm{d}x$.

13.b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in [\![0, n]\!]$, le réel $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\mathrm{d}x$ est indépendant de l'entier k et que $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)}$.

13.c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

14. Montrer que le résultat de la question 13.c) reste vrai pour la seule hypothèse que f est continue sur $[0, 1]$.

15. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b \leq c - 2$.

15.a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\mathrm{d}u$ est convergente.

15.b) Montrer que, pour $b \geq 1$, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

15.c) Montrer que la fonction $h : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{1-t} \end{array}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui est strictement croissante et bijective.

15.d) En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$, calculer $F(0)$; en déduire la valeur de $F(1)$.

PARTIE 4. SERIES DE FONCTIONS

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in [0, 1]$, on note :

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si} \quad n \geq k \\ 0 & \text{si} \quad n < k, \end{cases} \quad \text{si bien que } f_n(t) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} & \text{si} \quad n \geq k \\ 0 & \text{si} \quad n < k. \end{cases}$$

16. Montrer que $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire, pour tout $t \in]0, 1[$, un équivalent de $f_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

17. Etablir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

Pour $t \in [0, 1]$, on note $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

18. Déterminer $S(t)$ pour $t = 0$ et pour $t = 1$.

19.

19.a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{1-u}$.

19.b) En déduire que, pour tout $u \in [0, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$.

19.c) En déduire que, pour tout $t \in]0, 1]$, $S(t) = \dfrac{1}{t}$.

19.d) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?

Fin de l'énoncé