Correction du DS6 de mathématiques, proposé le 13/3

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Linéariser $\sin^3 x$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

On a, $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x})$ $\boxed{= \ -\dfrac{1}{4}\sin 3x + \dfrac{3}{4}\sin x}$

Question 2 : Délinéariser $\sin(3x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = \text{Im}\left(e^{i3x}\right) = \text{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) = \text{Im}\left((\cos x + i\sin x)^3\right)$.

On développe :

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$$

Et on conclut : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x}$.

Question 3 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{1}{u^2+2}\,du \quad (\text{avec } u = x+1) \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+1}\,dt \quad (\text{avec } \varphi(t) = \sqrt{2}t) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{Arctan}\,\sqrt{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}
\end{aligned}$$

Question 4 : Décider si $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Le cas échéant, donner son inverse.

On échelonne $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 3 & -2 & 1 & z \end{array}\right)$, on observe que le rang de M est 3 ce qui signifie que <u>M est inversible</u>.

On poursuit jusqu'à la réduction, les coefficients de la colonne augmentée donnent $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 13 & 3 \end{pmatrix}}$.

Question 5 : En utilisant la méthode de votre choix, déterminer le développement limité à l'ordre 5 de Arccos en 0.

Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$, elle admet donc un développement limité à l'ordre 5 en 0.
On a : $\forall x \in]-1;1[, \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Par opérations, en utilisant le développement de référence de $(1+u)^\alpha$ en 0, on obtient le développement limité à l'ordre 4 de Arccos′ en 0 : $\text{Arccos}'(x) \underset{0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$.
En intégrant et en se souvenant que $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$ on obtient : $\boxed{\text{Arccos}(x) \underset{0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$.

Question 6 : On considère la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+5x^2+x}$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a) Prouver que $\mathcal{C}$ admet une asymptote pour $x \to +\infty$.
Clairement $f(x)$ est définie pour $x > 0$, et donc au voisinage de $+\infty$.

On a : $\forall x > 0,\ f(x) = x\sqrt[3]{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}$. On sait que $(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+o(u^2)$, on en déduit que :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x\left(1+\frac{5}{3x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{25}{9x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} x+\frac{5}{3}-\frac{22}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\boxed{\text{On en déduit que } y = x+\frac{5}{3} \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ au voisinage de } +\infty.}$

b) Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ de de son asymptote.
On a vu que $f(x) \underset{+\infty}{=} x+\frac{5}{3}-\frac{22}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ et, pour $x > 0, -\frac{22}{9x} < 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{C} \text{ est au-dessous de son asymptote}}$.

Question 7 : On considère $\Gamma = \{(x;y;z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ 2y = 3z\}$.

a) Prouver que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.
Soit $(x;y;z) \in \mathbb{C}^3$. On a :

$$(x;y;z) \in \Gamma \iff y = \frac{3}{2}z \iff (x;y;z) = (x;\frac{3}{2}z;z) \iff (x;y;z) = x(1;0;0)+z(0;\frac{3}{2};1)$$

Finalement, $\boxed{\Gamma = \mathrm{Vect}((1;0;0),(0;\frac{3}{2};1))}$.

b) En donner une base et un supplémentaire.
D'après la question précédente, $(1;0;0),(0;\frac{3}{2};1)$ est génératrice de Γ. Comme ces deux vecteurs sont non-colinéaires, ils forment une famille libre et donc $\boxed{((1;0;0),(0;\frac{3}{2};1)) \text{ est une base de } \Gamma}$.

$(0;0;1)$ n'appartient pas à Γ, la fammille $((1;0;0),(0;\frac{3}{2};1),(0;0;1)$ est donc libre.
Elle est également génératrice de $\mathbb{C}^3$ car elle génère les vecteurs de la base canonique (elle en comporte deux et $(0;1;0) = \frac{2}{3}(0;\frac{3}{2};1)-\frac{3}{2}(0;0;1))$; c'est donc une base de $\mathbb{C}^3$.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{Vect}(0;0;1) \text{ est un supplémentaire de } \Gamma \text{ dans } \mathbb{C}^3.}$

Exercice n° 2

On travaille dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^3$ et on considère l'ensemble $\Gamma = \{(x;y;z) \in \mathbb{K}^3 / x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz = 0\}$.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que Γ est une droite vectorielle de $\mathbb{K}^3$.
On a, $\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz = (x+y)^2+(y+z)^2$ qui est une somme de réels positifs.
Il suit que :

$$(x;y;z) \in \Gamma \iff (x+y)^2+(y+z)^2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \end{array}\right. \iff (x;y;z) = x(1;-1;1)$$

Finalement, $\boxed{\Gamma = \mathrm{Vect}((1;-1;1)) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que Γ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.
Soit $\forall (x;y;z) \in \mathbb{C}^3$ on a :

$$(x;y;z) \in \Gamma \iff (x+y)^2+(y+z)^2 = 0 \iff (x+y)^2-(\mathrm{i}(y+z))^2 = 0 \iff (x+y+\mathrm{i}(y+z)))\,(x+y-\mathrm{i}(y+z))) = 0$$

On a, par intégrité de $\mathbb{C}$:

$$(x;y;z) \in \Gamma \iff x+y(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}z = 0 \quad \text{OU} \quad x+y(1-\mathrm{i})-\mathrm{i}z = 0$$

Γ est donc la réunion de deux plans vectoriels :

$$\Gamma = \mathrm{Vect}\,((-1-\mathrm{i};1;0),(-\mathrm{i},0,1)) \ \cup \ \mathrm{Vect}\,((-1+\mathrm{i};1;0),(\mathrm{i},0,1))$$

La réunion de deux plans vectoriels différents n'est pas un sous-espace vectoriel, pour justifier directement que Γ n'est pas un sous-espace vectoriel on observe que $(-\mathrm{i};0;1)$ et $(\mathrm{i};0;1)$ sont dans Γ mais leur somme $(0;0;2)$ non.

Exercice n° 3

L'objectif de cet exercice est de trouver tous les polynômes non nuls $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1) \ : (\star).$$

1. Traiter le cas des polynômes constants.
   Soit $P = c \in \mathbb{C}$. P vérifie $(\star)$ si, et seulement si, $c = c^2$ c'est-à-dire si, et seulement si $c \in \{0; 1\}$.
   Finalement, $\boxed{\text{il y a deux polynômes constants qui vérifient } (\star) : 0 \text{ et } 1}$.
2. Supposons qu'il existe un polynôme non-constant P qui vérifie la relation $(\star)$. Prouver par l'absurde que 2 n'est pas une racine de P.
   Si $P(2) = 0$ alors, d'après $(\star)$, $P(4) = 0$. Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(2^n) = 0$.
   P est donc un polynôme non nul qui admet une infinité de racines ; c'est absurde.
   Finalement, $\boxed{2 \text{ n'est pas une racine de } P}$.
3. Supposons que P ait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Prouver que $|\alpha| \in \{0; 1\}$.
   Soit α une racine de P. Par une récurrence immédiate $(\alpha^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dont tous les termes sont des racines de P. Si $|\alpha| > 1$ la suite $(|\alpha^{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et donc P a une infinité de racines ce qui n'est pas possible.
   De façon analogue, si $0 < |\alpha| < 1$ la suite $(|\alpha^{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ce qui n'est pas possible non plus. On a donc $\boxed{|\alpha| \in \{0; 1\}}$.
4. Montrer que toutes les racines de P sont dans l'ensemble $\{0; 1; e^{i\frac{\pi}{3}}; e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.
   Soit α une racine non nulle de P, $\alpha - 1$ est alors une autre racine de P et on peut appliquer ce qu'on a vu avant : $|\alpha - 1| \in \{0; 1\}$.
   Les conditions $|\alpha| \in \{0; 1\}$ et $|\alpha - 1| \in \{0; 1\}$ s'interprètent géométriquement :
   — $\alpha = 0$ ou α est situé sur le cercle trigonométrique ;
   — $\alpha = 1$ ou α est situé sur le cercle de centre 1 et de rayon 1.
   Finalement, $\boxed{\alpha \in \{0; 1; e^{i\frac{\pi}{3}}; e^{-i\frac{\pi}{3}}\}}$.
5. Justifier que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ne sont pas racines de P.
   Si on avait $P(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$ alors on aurait $P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 0$ c'est-à-dire que $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ serait une racine de P. Or $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ n'est pas dans l'ensemble trouvé à la question précédente, ce n'est donc pas possible. On procède de façon analogue pour $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   Finalement, $\boxed{e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ne sont pas racines de } P}$.
6. Trouver les polynômes non-constants qui vérifient $(\star)$ puis conclure.
   On a montré que, les polyômes non constants qui vérifient $(\star)$ ont pour uniques racines 0 et 1. Ils sont donc de la forme $\lambda X^n(X-1)^p$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
   En appliquant $(\star)$ on obtient $\lambda X^{2n}(X^2-1)^p = \lambda^2 X^n(X-1)^p(X-1)^n X^p$ ce qui équivaut à $n = p$ et $\lambda = 1$.

   Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des polynômes qui vérifient } (\star) \text{ est } \left\{0; 1; (X^2 - X)^n \ /\ n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Remarques :

a) Le polynôme 1 apparaît deux fois dans l'expression donnée pour l'ensemble des solutions.
b) On a fait une confusion (un peu) abusive entre $\mathbb{C}$ et le plan complexe lorsqu'on a interprété géométriquement les conditions sur les modules. (Il aurait fallu parler des points du plan donc les affixes sont les nombres complexes).

Problème : intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie A : Intégrales de Wallis

Définition
Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ est appelée intégrale de Wallis d'indice n et notée W_n.

1. Calculer W_0 et W_1.
   On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$.
2. Etudier les variations de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\sin x - 1) \, dx$. Or, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq 0$ et $\sin x - 1 \leq 0$.
   Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le « bon sens ») on a $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n \leq 0$, c'est-à-dire que $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

3. Prouver que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[,\ \sin x > 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N},\ W_n > 0$ (encore par positivité de l'intégrale).
$\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée donc convergente vers un réel } \ell \geq 0}$.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
Soit n un entier naturel. On a : $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1} x \ \mathrm{d}x$.
On pose $\begin{cases} u' = \sin x \\ v = \sin^{n+1} x \end{cases}$ et $\begin{cases} u = \cos x \\ v' = (n+1)\sin^n x \cos x \end{cases}$ et, en intégrant par parties il vient :
$$W_{n+2} = \left[\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x \ \mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x \ \mathrm{d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$
En regroupant les termes, il vient $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n}$.

5. Démontrer, en se servant des questions précédentes, que $W_{n+1} \sim W_n$.
Comme $\frac{n+1}{n+2} \to 1$ on a $W_{n+2} \sim W_n$.
De plus, comme la suite $(W_n)_n$ est décroissante et strictement positive on a $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$ puis $\frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$. En passant à la limite on a $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$ c'est-à-dire $\boxed{W_{n+1} \sim W_n}$.

6. Prouver par récurrence une des deux formules ci-dessous :
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}} \qquad \text{(Première formule de Wallis)}$$
Prouvons $\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Pour $p = 0$ on a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = 1 \times \frac{\pi}{2}$: la propriété est donc initialisée.

Supposons que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$, montrons que $W_{2(p+1)} = \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire :
$$W_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$
On a : $W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \dfrac{2p+1}{2p+2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p+1)(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
La propriété est donc héréditaire.

Finalement, la propriété est initialisée pour $p = 0$, elle est héréditaire donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Remarque : on travaille de façon analogue pour les termes d'indices impairs. Une autre façon de procéder est de voir des produits téléscopiques.

7. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} = \pi}$ (Deuxième formule de Wallis).
On a vu que $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} \to 1$. Or, d'après la question précédente :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p)!^2}\frac{1}{2p+1}\frac{2}{\pi}$$
On en déduit que $\forall p \in \mathbb{N},\ \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} = \dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}}\dfrac{2p+1}{p}\dfrac{\pi}{2}$. En passant à la limite, il vient $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} = \pi}$.

Partie B : Formule de Stirling

1. Dans cette question on montre que $n!$ admet un équivalent de la forme $\lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On utilisera les suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \quad ; \quad b_n = \ln(a_n) \quad ; \quad c_n = \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} a_n\right)$$

a) Démontrer que $\forall n > 0,\ b_{n+1} - b_n = 1 - (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n})$.

Tout d'abord, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$ et donc b_n est bien définie.
On calcule : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ln\left((n+1)\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\mathrm{e}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)$.

Finalement, on a $\forall n > 0,\ b_{n+1} - b_n = 1 + (n + \frac{1}{2})\ln(\frac{n}{n+1}) \boxed{= 1 - (n + \dfrac{1}{2})\ln(1 + \dfrac{1}{n})}$.

b) En utilisant un développement limité usuel, déduire de la question précédente que $b_{n+1} - b_n \sim -\frac{1}{12n^2}$.
On sait que $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.
En prenant $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $\ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$. Il suit que :

$$b_{n+1} - b_n = 1 - (n + \frac{1}{2})(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})) \boxed{= -\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$$

c) Démontrer que $\forall n > 0,\ c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n(n+1)} + b_{n+1} - b_n$ puis que $c_{n+1} - c_n \sim \frac{11}{12n^2}$.
On calcule : $\forall n > 0,\ c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n(n+1)} + b_{n+1} - b_n$. Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
et, en utilisant la question précédente : $\boxed{c_{n+1} - c_n = \frac{11}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$

d) Justifier que les suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ sont adjacentes à partir d'un certain rang et en déduire que $(a_n)_n$ converge vers un réel $\lambda > 0$
On a vu que $b_{n+1} - b_n \sim -\frac{1}{12n^2}$ qui est négatif, donc $b_{n+1} - b_n$ est négatif à-partir d'un certain rang et alors $(b_n)_{n>0}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
De façon analogue, $(c_n)_{n>0}$ est croissante à partir d'un certain rang.
De plus, $\forall n > 0,\ b_n - c_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\boxed{\text{les suites } (b_n)_n \text{ et } (c_n)_n \text{ sont adjacentes à partir d'un certain rang}}$.
Elles convergent donc vers un réel ℓ.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \mathrm{e}^{b_n}$, on en déduit (par continuité de exp) que $a_n \to \mathrm{e}^{\ell}$.
Finalement, $\boxed{(a_n)_n \text{ converge vers } \lambda = \mathrm{e}^{\ell} > 0}$.

e) Justifier que $n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

D'après la question précédente, comme $\lambda \neq 0$, on a $\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \sim \lambda$ puis, par produit : $\boxed{n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$.

2. Utiliser la question précédente et la deuxième formule de Wallis pour établir la formule de Stirling.
En posant $n = p$ puis $n = 2p$ dans la question précédente, on a : $p! \sim \lambda\sqrt{p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p$ et $(2p)! \sim \lambda\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}$.
Par produit et quotient d'équivalents, on a :

$$\frac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} \sim \frac{2^{4p}}{p}\frac{\left(\lambda\sqrt{p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p\right)^4}{\left(\lambda\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}\right)^2} \sim \frac{\lambda^2}{2}$$

Or, d'après la deuxième formule de Wallis, $\frac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} \to \pi$ donc, par unicité de la limite $\frac{\lambda^2}{2} = \pi \iff \lambda = \sqrt{2\pi}$.
On reporte dans la formule trouvée à la fin de la question précédente et on a $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$.