Durée: 4h

- l'usage de la calculatrice est autorisé
- les exercices sont indépendants
- les résultats devront être encadrés

Exercice n°1: Principe d'un traitement antireflet

Centrale TSI 2017

Le traitement antireflet d'un verre de lunette permet d'améliorer la netteté, le contraste, la vision des couleurs et présente également de nombreux autres avantages, y compris esthétiques. La partie I consiste en une étude descriptive du phénomène ; la partie II proposant quant à elle une étude plus théorique.

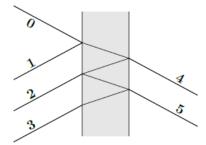
Dans tout le problème, c désigne la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide et j le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$. L'indice de l'air sera pris à un et λ désigne la longueur d'onde, dans l'air, d'une radiation monochromatique.

Un formulaire et différentes données numériques sont fournis en fin d'énoncé.

I Principe d'un traitement antireflet

I.A - Intensités lumineuses transmise et réfléchie pour un verre simple

Considérons un rayon incident arrivant sur une lame de verre d'indice n=1,5 baignée dans l'air. Le tableau figure 1 indique les pourcentages des intensités des rayons considérés par rapport au rayon incident, noté 0. D'autres rayons existent mais n'ont pas été représentés.



Rayon	Intensité
0	100%
1	4,0%
2	3,7%
3	0,006%
4	92%
5	0,15%

Figure 1

À l'aide de la figure 1, indiquer quelle est l'intensité lumineuse réfléchie sur le verre de lunette et comparer celle-ci à l'intensité transmise.

I.B — Un traitement antireflet monocouche consiste à recouvrir la surface du dioptre par une couche d'un matériau sur une épaisseur e comme indiqué sur le schéma de principe figure 2. La lumière incidente est supposée monochromatique de longueur d'onde dans l'air λ .

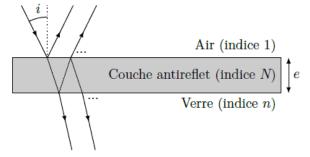


Figure 2

Le principe du traitement est d'utiliser un système interférentiel. L'épaisseur choisie pour la couche est $e = \frac{\lambda}{4N}$.

- I.B.1) Préciser pourquoi les différentes ondes réfléchies peuvent interférer entre elles.
- I.B.2) En considérant un éclairage sous incidence normale ($i = 0^{\circ}$) et en traduisant la condition d'interférence destructive entre les ondes 1 et 2, justifier l'expression de e. Quelles autres valeurs pourraient éventuellement être choisies ?
- I.B.3) Quelle longueur d'onde va-t-on choisir pour calculer e?
- I.B.4) Citez un autre paramètre ayant une influence sur l'épaisseur choisie à N et λ fixés?

I.C - Courbes de ZEISS

Les courbes de ZEISS fournissent en fonction de la longueur d'onde de la radiation incidente les pourcentages des intensités lumineuses réfléchies.

La figure 3 fournit les courbes de ZEISS pour un verre minéral avec et sans traitement monocouche.

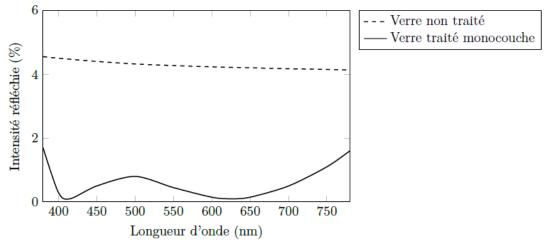


Figure 3

- I.C.1) Que remarque-t-on dans le cas non traité?
- I.C.2) Que peut-on dire de la radiation 625 nm?
- I.C.3) Proposer une explication pour le fait qu'il y a deux minimas sur la courbe. La tester quantitativement et conclure.

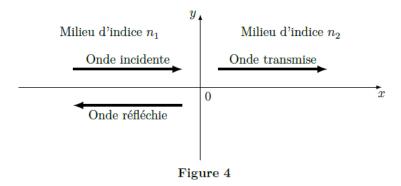
II Étude de la réflexion d'une onde électromagnétique

Dans cette partie nous allons nous intéresser à des milieux isolants non chargés, transparents et non absorbants. On admet que les propriétés de ces milieux sont semblables à celles du vide en remplaçant la permittivité ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$, ε_r désignant la permittivité relative du milieu.

- II.A Propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau isolant non chargé
- II.A.1) Écrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré en précisant leur nom.
- II.A.2) Établir l'équation de propagation du vecteur champ électrique dans le milieu.
- II.A.3) Exprimer la célérité de propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu et montrer que son indice est alors $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.
- II.A.4) On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant vers les x croissants de la forme

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_u$$

- a) L'onde plane progressive est-elle polarisée rectilignement ? Si oui, dans quelle direction ?
- b) Déterminer l'expression du vecteur d'onde \vec{k} . On montrera en particulier que $k=n\frac{\omega}{c}$.
- c) Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique associé.
- II.B Coefficients de transmission et réflexion en énergie à l'interface entre deux milieux On s'intéresse à l'interface suivante entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , séparés par le plan x = 0.



On considère une onde électromagnétique incidente, le vecteur champ électrique étant $\vec{E}_{\rm incident} = \vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_y$. On note $\vec{E}_{\rm refléchi} = \vec{E}_2 = \rho E_0 \cos(\omega t + k_2 x) \vec{u}_y$ le champ électrique réfléchi et $\vec{E}_{\rm transmis} = \vec{E}_3 = \tau E_0 \cos(\omega t - k_3 x) \vec{u}_y$ où ρ et τ désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

- II.B.1) Justifier les formes des champs réfléchi et transmis fournis.
- II.B.2) Quelle relation existe entre k_1 et k_2 ainsi qu'entre k_2 et k_3 ? Justifier.
- II.B.3) Déterminer les expressions des champs magnétiques associés $\overline{B}_{\text{incident}}$, $\overline{B}_{\text{réfléchi}}$ et $\overline{B}_{\text{transmis}}$, notés respectivement \overline{B}_1 , \overline{B}_2 et \overline{B}_3 .
- II.B.4) Les champs électriques et magnétiques doivent vérifier des relations dites de passage à l'interface entre les deux milieux. Compte tenu des propriétés des deux milieux, on admet que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface.

Traduire ces deux relations et en déduire que $\rho=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$ et $\tau=\frac{2n_1}{n_1+n_2}$.

- II.B.5) Déterminer les expressions des vecteurs de Poynting pour les ondes incidente, réfléchie et transmise.
- II.B.6) À l'aide d'un bilan énergétique clairement défini, déterminer les expressions des coefficients de réflexion et transmission en énergie à l'interface, notés respectivement R et T. L'énergie est-elle conservée ? Justifier.

II.C - Condition sur l'indice de la couche antireflet

Un rayon incident arrive sous incidence normale sur une couche antireflet d'épaisseur e et d'indice N; celle-ci recouvrant un matériau d'indice n.

Compte tenu des différentes interfaces, plusieurs rayons vont être réfléchis et transmis comme indiqué figure 5. On supposera 1 < N < n.

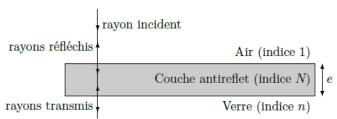


Figure 5

On note respectivement $\rho_{n_1 \to n_2}$ et $\tau_{n_1 \to n_2}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour une interface de type $n_1 \to n_2$, n_1 étant l'indice du milieu associé à l'onde incidente.

- II.C.1) Donner les expressions des coefficients $\rho_{1\to N}$, $\rho_{N\to n}$, $\tau_{1\to N}$ et $\tau_{N\to 1}$.
- II.C.2) Soit \underline{E}_0 l'amplitude complexe du champ électrique associée à l'onde incidente.

L'amplitude complexe de la première onde réfléchie s'écrit alors $\rho_{1\to N}\underline{E}_0$.

- a) Justifier que l'amplitude complexe de la seconde onde réfléchie est $\underline{E}_0 \tau_{1 \to N} \rho_{N \to n} \tau_{N \to 1} e^{j\varphi} = \underline{a}$ avec $\varphi = \frac{4\pi Ne}{\lambda}$ où λ et la longueur d'onde dans le vide.
- b) Exprimer alors les amplitudes complexes des ondes réfléchies suivantes en fonction de \underline{a} , φ et des différents coefficients de réflexion et transmission.
- c) En remarquant que $\tau_{1\to N}\tau_{N\to 1}=1-\rho_{1\to N}^2$, montrer que l'amplitude complexe résultante pour les ondes réfléchies est : $\underline{A}=\underline{E}_0\frac{\rho_{1\to N}+\rho_{N\to n}\mathrm{e}^{j\varphi}}{1+\rho_{1\to N}\rho_{N\to n}\mathrm{e}^{j\varphi}}$
- d) Quelles sont les valeurs possibles de φ permettant des interférences destructives?
- e) Montrer que l'intensité réfléchie peut s'annuler pour une valeur particulière de N. Commenter.

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses. La possibilité de mettre en lévitation des échantillons solides ou liquides, de faible masse, est maintenant bien établie, et des avancées récentes laissent entrevoir des applications concrètes de ce procédé.

En 2013, une équipe de chercheurs suisses ¹ a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant un transport *contrôlé* de petits objets. Ils sont ainsi parvenus à mélanger une goutelette d'eau et un granulé de café soluble. Cette expérience a priori ludique recèle en réalité des applications technologiques et industrielles extrêmement précieuses, telle que le contrôle de certains procédés chimiques ou biologiques.

En 2015, c'est une équipe de recherche sud-américaine ² qui a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant de transporter des objets avec une grande *stabilité* donc sans aucun risque d'en perdre le contrôle mécanique, ce qui intéresse particulièrement les secteurs sensibles du nucléaire et de la chimie, où la dangerosité de la matière transportée impose de prendre en compte les risques inhérents aux chocs ou à la dissémination.

Ce problème aborde le principe de la lévitation acoustique de manière simplifiée. Il comporte 2 parties largement indépendantes : la première modélise le phénomène de lévitation acoustique, alors que la seconde présente un dispositif de conversion d'énergie pouvant alimenter le transducteur générant les ondes sonores.

Les vecteurs seront surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\widehat{e}) et d'une flèche dans le cas général (\vec{a}) . Ainsi dans l'espace cartésien on notera $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. À l'exception de j, tel que $j^2 = -1$, les nombres complexes seront soulignés.

Dans tout le problème, **exprimer** signifie donner l'expression littérale et **calculer** signifie donner la valeur numérique avec deux chiffres significatifs.

I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface $S=10\,\mathrm{cm}^2$, est en vibration au voisinage de la hauteur h à la vitesse $\vec{u}_m(t)=U_m\sin(\omega\,t)\hat{e}_z$ avec $U_m=10\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Il génère une onde sonore de fréquence $f=20\,\mathrm{kHz}$ supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est totalement réfléchie par une paroi fixe placée en z=0.

Le milieu de propagation est de l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au

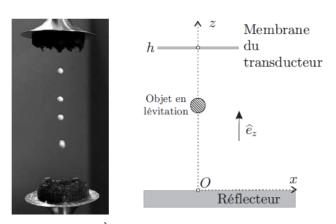


FIGURE 1 – À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique $\mu_0 = 1.2 \,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires; la température T_0 étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de z soit $P_0 = P_0(z)$.

^{1.} D. Foresti, M. Nabavi, M. Klingauf, A. Ferrari and D. Poulikakos, « Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air », *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A*, vol. 110 no. 31, Janvier 2013, 12549 - 12554

^{2.} M. A. B. Andrade, N. Pérez, J. C. Adamowski, « Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator », Appl. Phys. Lett., 106, 014101, Janvier 2015

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité $c=3.4\times 10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) = \mu_0 + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) = v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

Les termes p_1 et μ_1 sont perturbatifs : pour toutes les valeurs de t et de z concernées on a donc $|p_1| \ll |P_0|$ et $|\mu_1| \ll |\mu_0|$. L'évolution du fluide mis en mouvement par l'onde sonore est supposée adiabatique et réversible. Le coefficient de compressibilité isentropique sera noté χ_S et assimilé à une constante.

- □ 1 Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Sauf mention contraire, on suppose ces hypothèses vérifiées par la suite.
- \Box 2 On considère une particule fluide, de volume $d\tau$, mise en mouvement par le passage de l'onde sonore. Montrer que, dans l'approximation acoustique, son accélération peut s'écrire $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.
- \Box 3 Écrire, en projection sur \widehat{e}_z , l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse $\mu_0 d\tau$. Que donne cette relation si la particule est au repos? Compte-tenu de cette seconde relation, déterminer finalement une équation aux dérivées partielles reliant les seules grandeurs μ_0 , v_1 et p_1 .
- □ 4 Donner les expressions linéarisées des relations locales traduisant, d'une part la conservation de la masse, et d'autre part le caractère isentropique de l'évolution du fluide sous l'effet de l'onde acoustique.
- \Box 5 Montrer que le champ des vitesses $v_1(z,t)$ vérifie une équation de propagation de la forme

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$$

Quel est le nom de cette équation? Exprimer c en fonction des paramètres pertinents.

- □ 6 On note λ la longueur d'onde associée au phénomène propagatif décrit à la question précédente. On suppose que les transferts thermiques dans le milieu sont de type diffusif. On note $\kappa = 3.0 \times 10^{-2} \, \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ la conductivité thermique de l'air et $c_p = 1.0 \times 10^3 \, \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ sa capacité thermique massique à pression constante. Par un raisonnement en ordre de grandeur, montrer que l'hypothèse d'adiabaticité n'est valide que si la fréquence f de l'onde est inférieure à une valeur $f_{\rm max}$ que l'on exprimera, en fonction de κ , μ_0 , c_p et c. Qu'en est-il dans le cadre de cette expérience?
- \neg On note $z_m(t)$ la position de la membrane du transducteur au voisinage de h. Exprimer puis calculer l'amplitude Z_m de vibration de $z_m(t)$. On pourra prendre $(4\pi)^{-1} = 8.0 \times 10^{-2}$.
- □ 8 On s'intéresse à l'onde sonore résultante entre le transducteur et le réflecteur. Justifier la condition aux limites

$$u_m(t) \approx v_1(h,t)$$

 \bigcirc 9 — Déterminer complètement la vitesse $v_1(z,t)$ dans l'espace $0 \le z \le h$ et exprimer son amplitude maximale V_1 en fonction de U_m , h, ω et c.

- \square 10 Déterminer les positions spatiales des maxima de vitesse en fonction de λ et d'un entier n. Commenter ce résultat. Montrer que l'amplitude V_1 des maxima diverge pour certaines pulsations ω_n . En pratique, quels phénomènes limitent la valeur de V_1 ?
- □ 11 Exprimer la surpression $p_1(z,t)$ associée à $\vec{v}_1(z,t)$. On considère une bille, de rayon $a \ll \lambda$ et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante \vec{F} des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle $\langle \vec{F} \rangle$. Le modèle étudié jusqu'à présent permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille?
- □ 12 On règle dorénavant la valeur de h de manière à obtenir $V_1 = 50 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pourquoi n'est-il plus possible de se placer dans l'approximation acoustique?

On pose maintenant:

$$\begin{cases} P(z,t) = & P_0(z) + p_1(z,t) + p_2(z,t) \\ v(z,t) = & v_1(z,t) + v_2(z,t) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 sont les grandeurs constantes au repos (en l'absence d'onde sonore), les termes d'indice 1 sont les solutions étudiées précédemment et les termes d'indice 2 sont des corrections d'ordre 2, résultant des termes non linéaires des équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène.

□ 13 — On admet que la surpression $p_2(z,t)$ est de la forme

$$p_2(z,t) = \frac{1}{4}\mu_0^{\ell} V_1^q \cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + f(z)\cos(2\omega t)$$

- où f(z) est une fonction dont il n'est pas nécessaire de connaître l'expression. Déterminer les valeurs des entiers ℓ et q. Déterminer la moyenne temporelle $\langle F_z \rangle(z)$ de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille.
- □ 14 Montrer, sans les déterminer explicitement, qu'il existe des positions d'équilibre tant que la masse volumique μ_b de la bille reste inférieure à une valeur $\mu_{b,\text{max}}$ dont on précisera l'expression. En vous appuyant sur une représentation graphique de la force moyenne $\langle F_z \rangle(z)$, discuter la stabilité des positions d'équilibre.
- □ 15 Calculer $\mu_{b, \text{max}}$ et proposer une estimation de la masse maximale $m_{b, \text{max}}$ d'une bille susceptible de léviter avec le dispositif présenté ici. Commenter les valeurs numériques.
- \Box 16 Comme on le voit sur la figure 1 le dispositif permet de faire léviter plusieurs objets. Quelle est la distance qui les sépare? Exprimer le nombre maximal de ces objets en fonction de λ et h.
- □ 17 On observe que les objets en lévitation dans ce dispositif ont un petit mouvement d'oscillation de pulsation $\tilde{\omega}$ au voisinage de leurs positions d'équilibre. Déterminer l'expression de $\tilde{\omega}$ en fonction des paramètres du problème.

ANNEXE de l'exercice 1

Formulaire

 $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{a})) - \overrightarrow{\Delta}(\vec{a})$

Données

Extrait du tableau périodique

• •				
Numéro atomique	1	8	12	17
Symbole	H	O	Mg	Cl
Masse molaire (g·mol ⁻¹)	1,00	16,0	24,3	35,5

Table des enthalpies standard de formation à $T_0=298\,\mathrm{K}$

	$\mathrm{MgCO_{3}}_{(\mathbf{s})}$	$\mathrm{MgO}_{(\mathrm{s})}$	$CO_{2(g)}$
$\Delta_f H^\circ \ (\mathrm{kJ}{\cdot}\mathrm{mol}^{-1})$	-1112	-601,6	-393,5

Équilibres chimiques et constantes associées

Réaction		$K^{\circ}(T)$	Condition	
(1)	$\mathrm{Si}_{(\mathrm{s} \text{ ou } \ell)} + \mathrm{O}_{2(\mathrm{g})} = \mathrm{SiO}_{2(\mathrm{s} \text{ ou } \ell)}$	$K_1^{\circ} = \exp\left(-21,04 + \frac{1,088 \times 10^5}{T}\right)$	$298\:\mathrm{K}\leqslant T\leqslant 2500\:\mathrm{K}$	
(2)	$2 Mg_{(s)} + O_{2(g)} = 2 MgO_{(s)}$	$K_2^{\circ} = \exp\left(-24,66 + \frac{1,443 \times 10^5}{T}\right)$	$298~\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 923~\mathrm{K}$	
(3)	$2{\rm Mg_{(l)}} + {\rm O_{2(g)}} = 2{\rm MgO_{(s)}}$	$K_3^{\circ} = \exp\left(-26,10 + \frac{1,455 \times 10^5}{T}\right)$	$923~\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 1380~\mathrm{K}$	
(4)	$2{\rm Mg_{(g)}} + {\rm O_{2(g)}} = 2{\rm MgO_{(s)}}$	$K_4^{\circ} = \exp\left(-48,59 + \frac{1,768 \times 10^5}{T}\right)$	$1380~\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 2500~\mathrm{K}$	

Divers

 $T_{\rm fusion}({\rm Si}) = 1683~{\rm K}$

 $T_{\rm fusion}({
m SiO_2}) = 2000~{
m K}$

Paramètre de maille de MgO : $a=4,21\times 10^{-10}~\mathrm{m}$ Constante des gaz parfaits : $R=8,31~\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ Constante d'Avogadro : $N_A=6,022\times 10^{23}~\mathrm{mol^{-1}}$

À $T_0 = 298\,\mathrm{K}$: $\frac{RT_0}{F}\ln(x) \approx 0.06\log(x)$