DS n° VI Mathématiques

Durée : 4h. Des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions. Le barème tiendra compte de la longueur extrême du sujet.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. (a) Expliciter des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) < 0$.
   Expliciter de même des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) > 0$.
   La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$.

   (b) Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v)$ puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

   (c) Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\dfrac{1}{2} - 2r\right)$.
   Que peut-on en conclure ?

   (d) La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note la matrice hessienne $H(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f en tout point (x, y).

   (b) Expliciter $H(0, 0) = M$ et $H(1, 1) = N$

   (c) Calculer la trace et le déterminant des matrices M et N.

   (d) M et N sont elles positives ? définies positives ? Retrouver les résultats des questions 2.a et 2.c.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
2. Montrer que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n.$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Problème 1

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} \mathrm{e}^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$$
est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.
3. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) \mathrm{d}t.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

4. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :
$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t.$$
6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :
$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \text{ et } F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.
8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.
10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.