DS n$^{\text{o}}$ VII Mathématiques

Durée : 2h. sujet commun (révisions) Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Exercice 1 *Isométries*

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
   Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Exercice 2 *Equation différentielle*

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y^{(3)} = y$$

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.
   (a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction : $g = f + f' + f''$.
   (b) Résoudre l'équation (E_2).
   (c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).
2. Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$,
   $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Résoudre le système (S).
   (c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1(c)** de cette partie.
3. On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
   (b) Justifier que φ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.
   (e) Déterminer une expression de $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.
   (f) Déterminer une expression de $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.