Exercice 1 *e3a PSI 2020 exo 4*

1. On a, en utilisant successivement la linéarité par rapport à la première, puis à la deuxième variable :

$$\Phi(X,Y) = x_1y_1\Phi(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2\Phi(\vec{i},\vec{j}) + x_2y_1\Phi(\vec{j},\vec{i}) + x_2y_2\Phi(\vec{j},\vec{j}).$$

Grâce aux données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\Phi(X,Y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\cos(\theta) + x_2y_2.$$

2. Par construction, Φ est une forme bilinéaire symétrique.
Il reste à vérifier que Φ est définie et positive.
Pour $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, alors :

$$\begin{aligned}\Phi(X,X) = x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 &= (x_1+\cos(\theta)x_2)^2 + x_2^2 - \cos(\theta)^2x_2^2 \\ &= (x_1+\cos(\theta)x_2)^2 + (1-\cos(\theta)^2)x_2^2.\end{aligned} \qquad (*)$$

On a $1-\cos(\theta)^2 \geqslant 0$ (mieux : par hypothèse $\theta \in]0,\pi[$, donc $1-\cos(\theta)^2 > 0$), donc la somme ci-dessus ne contient que des termes positifs. On en déduit d'une part : $\Phi(X,X) \geqslant 0$.
D'autre part, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc :

$$\Phi(X,X) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \cos(\theta)x_2 & = & 0 \\ \underbrace{(1-\cos(\theta)^2)}_{>0}x_2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, \\ x_2 & = & 0, \end{array}\right.$$

donc $\Phi(X,X) = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul : ceci achève de démontrer que Φ est définie positive.
En tant que forme bilinéaire symétrique définie positive, Φ est un produit scalaire sur E.

3. Comme f est linéaire, pour montrer que f est une isométrie il suffit de démontrer qu'elle préserve la norme euclidienne associée au produit scalaire Φ. C'est-à-dire :

$$\forall X \in E, \quad \sqrt{\Phi(f(X),f(X))} = \sqrt{\Phi(X,X)}.$$

On nous donne la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$, ce qui nous permet d'en déduire : $f(\vec{i}) = \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j}$, et donc, pour tout $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, on a :

$$f(X) = x_1f(\vec{i}) + x_2f(\vec{j}) = -x_2\vec{i} + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\vec{j}.$$

Grâce à l'explicitation de Φ donnée dans la première question (ou plutôt grâce à $(*)$ si l'on s'intéresse à $\Phi(X,X)$ et $\Phi(f(X),f(X))$), on en déduit :

$$\begin{aligned}\Phi(f(X),f(X)) &= (-x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1+2\cos(\theta)x_2)\cos(\theta) + (x_1+2\cos(\theta)x_2)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\theta) - 4x_2^2\cos(\theta)^2 + x_1^2 + 4x_1x_2\cos(\theta) + 4\cos(\theta)^2x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 = \Phi(X,X),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. Appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Notons que $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, donc $\vec{i}$ est déjà unitaire pour ce produit scalaire. Posons :
$$\vec{u} = \vec{j} - \Phi(\vec{i}, \vec{j})\vec{i}, \qquad \text{et :} \qquad \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\vec{u}, \vec{u})}}\vec{u}.$$
L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure alors que la famille $(\vec{i}, \vec{k})$ est orthonormée, et qu'on a $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$. Explicitons $\vec{k}$; on a : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \cos(\theta)$, et donc :
$$\vec{u} = \vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}.$$
Or :
$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) \overset{(*)}{=} (-\cos(\theta))^2 - 2\cos(\theta)\cos(\theta) + 1^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2,$$
donc finalement :
$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta)^2}}\left(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}\right) = \frac{1}{\sin(\theta)}\left(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}\right).$$

5. On sait déjà que f est une isométrie, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ permet de voir immédiatement que $\det(f) = \det(C) = 1$, donc f est une rotation plane dont il reste à déterminer une mesure d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$: or $2\cos(\alpha) = \mathrm{tr}(f)$ d'après la classification des isométries directes en dimension 2, donc $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$, et $\alpha = \epsilon\theta \bmod 2\pi$, pour $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$. Sans aller plus loin, on s'attend donc déjà à ce que la matrice de f dans une base orthonormée (ce qu'est $(\vec{i}, \vec{k})$) soit de la forme :
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ \epsilon\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
Or $f(\vec{i}) = \vec{j}$ d'après la donnée de la matrice C, et du fait que $\vec{k} = \dfrac{1}{\sin(\theta)}\left(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}\right)$ on en déduit : $\vec{j} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$. Par conséquent $f(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$, ce qui signifie que la première colonne de $\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. La discussion qui précède nous assure donc qu'on a :
$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
On en déduit que si E est orienté de sorte que la base $(\vec{i}, \vec{k})$ soit directe (ou $(\vec{i}, \vec{j})$: les deux bases ont même orientation), alors f est une rotation plane de mesure d'angle θ.
Remarque. Il est aussi possible d'obtenir $\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f)$ à partir de $\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{j})}(f) = C$ grâce à la formule du changement de base.

6. Comme f est une rotation plane de mesure d'angle θ, on sait que f^m est une rotation de mesure d'angle $m\theta$. Par conséquent, $f^m = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $m\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $m\theta = 2k\pi$. On en déduit :
$$f^m = \mathrm{Id}_E \iff \theta \in \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z} = \left\{\frac{2k\pi}{m} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 2 *e3a PSI 2019 problème I (extrait)*

1.

(a) Si f est une solution de (E_1), alors f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, donc f' est de classe C^2 et f'' de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En particulier elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$. En tant que somme d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$, l'application $g = f + f' + f''$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $g' = f' + f'' + f^{(3)}$. Or $f^{(3)} = f$ puisque f vérifie (E_1) par hypothèse, donc :

$$g' = f' + f'' + f = g,$$

ainsi g est une solution de l'équation différentielle du premier ordre (E_2) : $\boxed{y' = y}$.

(b) On reconnaît une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^t \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Si f est une solution de l'équation (E_1), alors d'après la question **1.1** de cette partie, l'application $g = f + f' + f''$ est solution de (E_2). Donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \lambda e^t.$$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f'(t) + f(t) = \lambda e^t. \qquad (E_\lambda)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, dont le membre de droite est de forme exponentielle : nous savons résoudre une telle équation. Ses solutions sont somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation différentielle homogène associée : déterminons ces solutions.

Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (E_λ) *:* $y'' + y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$.

Ainsi $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ et $\overline{j} = \bar{\mathrm{j}}$ sont deux solutions distinctes de l'équation caractéristique On en déduit que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t} \end{array} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Détermination d'une solution particulière de (E_λ). On considère $f_p : t \mapsto \mu e^t$, où $\mu \in \mathbb{C}$. L'application f_p est bien sûr de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et vérifie (E_λ) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu e^t + \mu e^t + \mu e^t = \lambda e^t \iff 3\mu = \lambda \iff \mu = \frac{\lambda}{3}.$$

Ainsi $f_p : t \mapsto \dfrac{\lambda}{3} e^t$ est une solution particulière de (E_λ).

Conclusion. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_λ) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t} + \dfrac{\lambda}{3} e^t \end{array} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Voyons comment en déduire l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de (E_1) : si f est une solution de (E_1), alors d'après ce qui précède il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que f soit solution de (E_λ) ; or nous avons démontré à l'instant que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de (E_λ) est inclus dans : $\mathcal{H}' = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left\{t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}, t \mapsto \mathrm{e}^{\bar{\mathrm{j}}t}, t \mapsto e^t\right\}\right)$.
On en déduit : $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$. De plus :

- d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application $Y \mapsto Y(0)$ définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre $\mathcal{H}$ et $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, donc : $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})) = 3$;
- la famille $\left(t \mapsto e^{\mathrm{j}t}, t \mapsto e^{\bar{\mathrm{j}}t}, t \mapsto e^{t}\right)$ est libre d'après la question **3.2** de la partie I, donc : $\dim(\mathcal{H}') = 3$.

Ainsi nous avons une inclusion entre deux espaces vectoriels de même dimension, donc ils sont égaux. En conclusion, l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_1) est :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left\{t \mapsto e^{\mathrm{j}t}, t \mapsto e^{\bar{\mathrm{j}}t}, t \mapsto e^{t}\right\}\right) = \left\{\begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma e^{t} \end{matrix} \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3\right\}.$$

Remarque. On peut aussi vérifier par un calcul direct que réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, toutes les solutions de (E_λ) sont des solutions de (E_1). .

2.

(a) Un calcul de déterminant montre que le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1).$$

Les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ sont j et $\bar{\mathrm{j}}$. On en déduit :

$$\chi_A = (X-1)(X^2 + X + 1) = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}).$$

Cela permet de répondre à la question de la diagonalisation de A :

- le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ d'après la CNS de diagonalisabilité ;
- le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}$ (en effet $\mathrm{j} \neq \bar{\mathrm{j}}$ vu que $\mathrm{j} \neq 0$ et $\mathrm{j} \neq 1$), donc A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$d'après la Condition Suffisante de diagonalisabilité ;

d'où le résultat.

(b) La matrice A étant diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, nous savons qu'il suffit, pour obtenir une base de solutions de (S), de déterminer ses éléments propres. La résolution des systèmes linéaires $AX = \mathrm{j}X$, $AX = \bar{\mathrm{j}}X$ et $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, permet d'obtenir :

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{j}\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \bar{\mathrm{j}}\end{pmatrix}\right), \ \mathrm{Ker}(A - \bar{\mathrm{j}}\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ \bar{\mathrm{j}}\\ \mathrm{j}^4\end{pmatrix}\right), \ \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right),$$

donc, si l'on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = e^{\mathrm{j}t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \bar{\mathrm{j}}\end{pmatrix}, \quad Y_1(t) = e^{\bar{\mathrm{j}}t}\begin{pmatrix}1\\ \bar{\mathrm{j}}\\ \mathrm{j}^4\end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

alors (Y_0, Y_1, Y_2) est une base de l'ensemble des solutions de (S). C'est-à-dire : une application $X : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est solution de (S) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $X = \alpha Y_0 + \beta Y_1 + \gamma Y_2$, si et seulement si :

$$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ X(t) = \alpha e^{\mathrm{j}t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \bar{\mathrm{j}}\end{pmatrix} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t}\begin{pmatrix}1\\ \bar{\mathrm{j}}\\ \mathrm{j}^4\end{pmatrix} + \gamma e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

ce qui résout explicitement le système (S).

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. Posons : $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$. Alors X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque toutes ses composantes le sont, et on a $X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{pmatrix}$. Par suite :

$$f \text{ vérifie } (E_1) \iff f^{(3)} = f \iff \begin{cases} f' &= f' \\ f'' &= f'' \\ f^{(3)} &= f \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X,$$

donc : f est solution de (E_1) si et seulement si $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ est solution de (S). Or nous avons déterminé les solutions de (S) dans la question précédente : on en déduit que f est solution de (E_1) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{\mathrm{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \bar{\mathrm{j}} \end{pmatrix} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mathrm{j}} \\ \mathrm{j}^4 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que (en identifiant coefficient par coefficient) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(t) &= \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma e^t \\ f'(t) &= \alpha \mathrm{j} e^{\mathrm{j}t} + \beta \bar{\mathrm{j}} e^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma e^t \\ f''(t) &= \alpha \bar{\mathrm{j}} e^{\mathrm{j}t} + \beta \mathrm{j}^4 e^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma e^t \end{cases}$$

Les deux dernières égalités sont conséquence de la première. Donc, en conclusion :

$$f \text{ est solution de } (E_1) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; f(t) = \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma e^t,$$

et l'on retrouve bien la description des solutions donnée dans la question **1.3**.

3.

(a) Nous allons utiliser la règle de D'Alembert : soit $x \in \mathbb{R}^*$. alors pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\left| \dfrac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = \frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|x|^3}{27n^3},$$

or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|x|^3}{27n^3} = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \dfrac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge (absolument). On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon de convergence demandé est $+\infty$.

(b) L'application φ est une somme de série entière définie sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme conséquence du théorème de dérivations terme à terme successive de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

(c) Par dérivations terme à terme (successives) de la somme d'une sur son intervalle ouvert de convergence, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \tag{1}$$

le terme correspondant à $n = 0$ étant de dérivée nulle, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-1) \frac{x^{3n-2}}{(3n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},$$

et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-2) \frac{x^{3n-3}}{(3n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} \overset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3n'}}{(3n')!},$$

c'est-à-dire : $\varphi^{(3)} = \varphi$.
Pour obtenir $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe que cela dépend de la congruence de k modulo 3 : partant de l'égalité $\varphi^{(3)} = \varphi$, une récurrence immédiate permet d'obtenir : $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(3\ell)} = \varphi$. Donc $\varphi^{(k)} = \varphi$ si k est un multiple de 3.
Si $k \equiv 1 \bmod 3$, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que : $k = 3\ell + 1$. En dérivant l'égalité $\varphi^{(3\ell)} = \varphi$ établie à l'instant, on obtient :

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(3\ell+1)} = \left(\varphi^{(3\ell)}\right)' = \varphi',$$

et de même on obtient $\varphi^{(k)} = \varphi''$ dans le cas où k est congru à 2 modulo 3. En résumé :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} & \text{si } k \equiv 0 \bmod 3, \\ \varphi'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} & \text{si } k \equiv 1 \bmod 3, \\ \varphi''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} & \text{si } k \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

(d) D'après la question précédente, on a : $\varphi^{(3)} = \varphi$. On en déduit que φ est solution de (E_1) ; d'après la question **1.3** ou **2.3**, il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \alpha e^{\mathrm{j}x} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}x} + \gamma e^x.$$

Déterminons les scalaires présents grâce aux valeurs de φ, φ' et φ'' en 0. En dérivant l'égalité ci-dessus, et en l'évaluant en 0, on a :

$$\begin{cases} \varphi(0) &= \alpha + \beta + \gamma \\ \varphi'(0) &= \alpha \mathrm{j} + \beta \bar{\mathrm{j}} + \gamma \\ \varphi''(0) &= \alpha \bar{\mathrm{j}} + \beta \mathrm{j}^4 + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(0) &= \alpha + \beta + \gamma, \\ \varphi'(0) &= \alpha \mathrm{j} + \beta \bar{\mathrm{j}} + \gamma, \\ \varphi''(0) &= \alpha \bar{\mathrm{j}} + \beta \mathrm{j} + \gamma, \end{cases} \tag{2}$$

puisque : $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}^3 \times \mathrm{j} = \mathrm{j}$. Mais on a aussi, en examinant les termes constants des développements en série entière en 0 de φ, φ' et φ'' que nous avons explicités dans la question précédente :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(0) & = & 1, \\ \varphi'(0) & = & 0, \\ \varphi''(0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

En combinant (2) et (3), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 1, \\ \alpha\mathrm{j}+\beta\bar{\mathrm{j}}+\gamma & = & 0, \\ \alpha\bar{\mathrm{j}}+\beta\mathrm{j}+\gamma & = & 0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire : (γ, α, β) est solution du système résolu dans la question de cours **2.3**. On en déduit : $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{1}{3}$, et donc, en utilisant le fait que $\bar{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}}$ (admis provisoirement) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^x + e^{\mathrm{j}x} + e^{\bar{\mathrm{j}}x}}{3} = \frac{e^x + e^{\mathrm{j}x} + e^{\bar{\mathrm{j}}x}}{3} = \frac{e^x + e^{\mathrm{j}x} + \overline{e^{\mathrm{j}x}}}{3} = \frac{e^x + 2\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}x}\right)}{3},$$

et grâce à la forme algébrique de j, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}x}\right) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), \tag{4}$$

d'où le résultat.

Voici une démonstration parmi d'autres de l'égalité $\bar{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}}$: on a $|\mathrm{j}|^2 = \mathrm{j} \cdot \bar{\mathrm{j}} = 1$ d'après la question **2.1** de cours, mais on a aussi $\mathrm{j}^3 = 1$ comme on l'a déjà vu, donc : $\mathrm{j}^3 = \mathrm{j} \cdot \bar{\mathrm{j}}$, puis : $\bar{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}}$, après division par $\mathrm{j} \neq 0$.

(e) Faisons le changement d'indice de sommation $n' = n - 1$ dans (1). On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3(n'+1)-1}}{(3(n'+1)-1)!} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3n'+2}}{(3n'+2)!} = \psi(x).$$

Pour répondre à la question de l'énoncé, il suffit donc d'écrire φ' explicitement à l'aide de fonctions usuelles à valeurs réelles. En dérivant l'identité (4), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - e^{-\frac{x}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)\right),$$

donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x - e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)\right).$$

(f) Il s'agit ici de remarquer que θ est la partie paire de φ. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n} + (-x)^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n} + (-1)^{3n}x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{3n}}{(3n)!}x^{3n},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(-1)^{3n} = \left((-1)^3\right)^n = (-1)^n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + (-1)^{3n} = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que dans la somme ci-dessus, tous les termes d'indices impairs sont nuls, et on ne somme que sur des indices n pairs ; si on les écrit $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2}{(6\ell)!} x^{6\ell} = 2\theta(x).$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),$$

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta(x) = \dfrac{1}{3}\left(\cosh(x) + \cosh\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$, d'où le résultat.