Correction du Devoir Surveillé 8, proposé le 26 mai 2020

Vrai ou Faux ?

Proposition 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
Il est possible de trouver des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ tels que $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$.

Vrai. Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^3$, on prend $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = \vec{0} = (0; 0; 0)$, $\vec{c} = (0; 1; 0)$ et $\vec{d} = (0; 0; 1)$.

Proposition 2 : $(X^2 + X - 1, X^2 + 3X + 2, X^2 + 7)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Vrai. $\mathcal{F} = (X^2 + X - 1, X^2 + 3X + 2, X^2 + 7)$ est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de vérifier que $\mathcal{F}$ est libre *(ou génératrice)* pour en déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit donc $\alpha(X^2 + X - 1) + \beta(X^2 + 3X + 2) + \gamma(X^2 + 7) = 0 \;\; : (\star)$ une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$.

$(\star) \iff \begin{cases} -\alpha + 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$. On échelonne la matrice du système :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

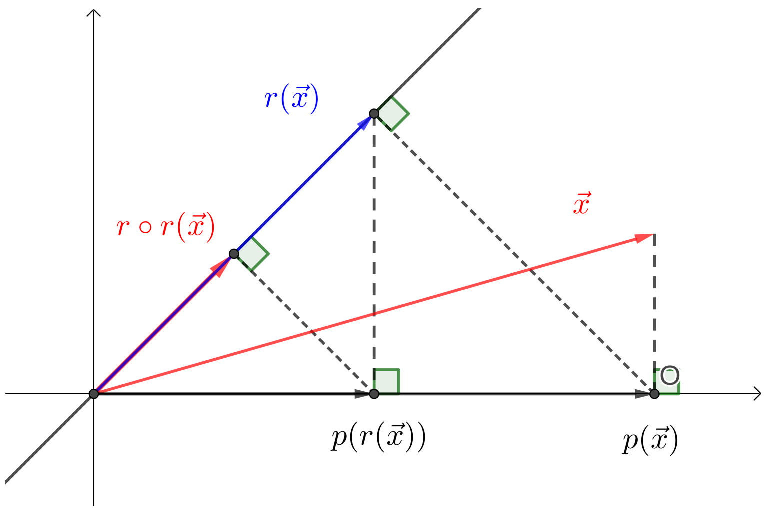
On en déduit que le système a une unique solution qui est $(\alpha; \beta; \gamma) = (0; 0; 0)$. On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est libre ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Proposition 3 : $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes.

Vrai. Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0\}$.
$X \notin E$, E est un sous-espace strict de $\mathbb{R}_3[X]$ et sa dimension est donc inférieure ou égale à 3.
$(X - 1; (X - 1)^2; (X - 1)^3)$ est une famille de E qui est libre (car elle est échelonnée en degré) on a donc $\dim\, E \geq 3$; on en déduit $\dim\, E = 3$.
E et $\mathbb{R}^3$ ont la même dimension, ce sont donc des espaces vectoriels isomorphes.

Proposition 4 : La composée de deux projeteurs est un projecteur.

Faux. Prenons un contre-exemple dans le plan avec p la projection orthogonale sur l'axe des abscisses (c'est-à-dire Vect $((1, 0))$), q la projection orthogonale sur la droite $y = x$ (c'est-à-dire Vect $((1, 1))$). $r = q \circ p$ est une application linéaire (comme composée d'applications linéaires), ce serait un projecteur si on avait $r \circ r = r$. Prenons un exemple :



Clairement $r \circ r(\vec{x}) \neq r(\vec{x})$ donc r n'est pas un projecteur.

Proposition 5 : Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie $f \circ f = 0$. Alors, rg $f = 1$.

Vrai. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, on a donc rg $f \leq \dim \mathbb{R}_2[X] \Longleftrightarrow$ rg $f \leq 3$.
$f \neq 0$ donc rg $f > 0$ et rg $f \in \{1, 2, 3\}$.
Si on avait rg $f = 3$ alors f serait un isomorphisme et $f \circ f$ en serait également un, ce qui n'est pas le cas puisque $f \circ f = 0$.
Supposons qu'on ait rg $f = 2$ alors, il existerait deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que Vect $(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \text{Im } f$.
$f \circ f = 0$ donc $f(\vec{x})$ et $f(\vec{y})$ sont dans Ker f. Or, d'après le théorème du rang, dim Ker $f = 1$, cela implique que $f(\vec{x})$ et $f(\vec{y})$ sont colinéaires : ils ne peuvent donc pas générer un plan vectoriel.
Finalement, la seule possibilité est rg $f = 1$.

Exercice : un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On considère les vecteurs $\vec{a}(7; 3; 1)$, $\vec{b}(-1; 1; 2)$ et $\vec{c}(2; 4; 5)$ et le sous-espace $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\phi(x; y; z) = (0; 0; x - 3y + 2z)$.

1. Quelle est la dimension de E ?

   Notons que $\vec{b} = -\frac{1}{11}(3\vec{a} - 5\vec{c})$, on a donc $E = \text{Vect } (\vec{a}, \vec{c})$.
   $\vec{a}$ et $\vec{c}$ n'étant pas colinéaires, E est un plan vectoriel.

2. Prouver que $E \subset \text{Ker } \phi$; en déduire que $E = \text{Ker } \phi$.

   $E = \text{Vect } (\vec{a}, \vec{c})$, on vérifie que $\phi(\vec{a}) = (0, 0, 0)$ et $\phi(\vec{c}) = (0, 0, 0)$ et il suit $E \subset \text{Ker } \phi$.
   Si on avait $E \neq \text{Ker } \phi$ alors on aurait $\dim E < \dim (\text{Ker } \phi)$ et donc $\dim (\text{Ker } \phi) = 3$ ce qui impliquerait $\text{Ker } \phi = \mathbb{R}^3$. ϕ serait alors l'application nulle, ce qui n'est pas le cas. On a donc $E = \text{Ker } \phi$.

3. Déterminer Im ϕ.

   Le théorème du rang nous assure que Im ϕ est une droite vectorielle.
   Par ailleurs, il est clair que $\text{Im } \phi \subset \text{Vect } ((0; 0; 1))$ donc $\text{Im } \phi = \text{Vect } ((0; 0; 1))$.

4. Prouver que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \phi \oplus \text{Im } \phi \ : (\star)$.

   $\phi((0, 0, 1)) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$ donc $(0, 0, 1) \notin \text{Ker } \phi$.
   $(\vec{a}, \vec{c}, (0, 0, 1))$ est ainsi une famille libre de $\mathbb{R}^3$, c'en est donc une base, ce qui prouve que Ker ϕ et Im ϕ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5. ϕ est-elle la projection sur Im ϕ parallèlement à Ker ϕ ?

   $\phi \circ \phi((0, 0, 1)) = \phi((0, 0, 2)) = (0, 0, 4) \neq (0, 0, 2)$. ϕ n'est donc pas un projecteur.

6. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $(\star)$, puis les images des vecteurs de cette base par ϕ. En déduire une description de ϕ sur Ker ϕ et sur Im ϕ.

   On a déjà vu une base adaptée à $(\star)$: $(\vec{a}, \vec{c}, (0, 0, 1))$.
   On a $\phi(\vec{a}) = \phi(\vec{c}) = \vec{0}$ et $\phi((0, 0, 1)) = (0, 0, 2)$.
   Sur Ker ϕ, ϕ est l'application nulle ; sur Im ϕ, ϕ est l'homothétie de rapport 2.