Correction du Devoir Surveillé proposé le 17 juin 2020

Exercice n° 1

La modélisation de l'expérience aléatoire conduit à la construction du même arbre de probabilité que pour la loi binômiale (si on représente les n lancés). Les valeurs prises par X sont 0 (si l'on n'a jamais eu Pile), 1 (on obtient Pile au premier lancé),..., n (on obtient Pile pour la première fois au $n-$ième lancé). On a :

x_i	1	2	...	n	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p	$(1-p)p$	...	$(1-p)^{n-1}p$	$(1-p)^n$

Exercice n° 2

Soit les événements :

- A :« le candidat est admis directement »
- B :« le candidat est admis après le rattrapage »
- C :« le candidat est admis »

On a $B \subset \overline{A}$ et $C = A \sqcup B$.

L'énoncé donne $\mathbb{P}(A) = p$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = p$.

On a $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = p + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = p + (1-p)p = p(2-p)$.

Pour chaque candidat, l'admission à l'examen (peu importe la session) est une expérience de Bernoulli de paramètre $p(2-p)$. Il est clair que les admissions des candidats sont indépendantes les unes des autres.
Le nombre de candidats admis parmi les n qui passent l'examen est donc une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli de même paramètre :
$\boxed{\text{elle suit donc une loi binomiale } \mathcal{B}(n, p(2-p))}$.

Exercice n° 3

$f \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$.
$f(x)$ est un vecteur non nul qui n'est pas colinéaire avec x car $f(f(x)) = f \circ f(x) = 0$, par hypothèse.

$$\boxed{\text{La famille } (x, f(x)) \text{ est donc une base de } E \text{ et, dans cette base, la matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Exercice n° 4

1. La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déterminons une expression de son terme général à l'aide de la méthode du cours.
   L'équation caractéristique est $E_c : r^2 - r - 1 = 0$ dont les deux solutions réelles sont $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Il suit qu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \alpha\phi^n + \beta\psi^n$.
   Pour $n = 0$ on obtient $\alpha = -\beta$; pour $n = 1$ on obtient $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

2. D'après la question 1, le terme général de $\sum \frac{F_n}{2^n}$ est donc $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n\right)$.
   On a $2 < \sqrt{5} < 3$ ce qui assure que $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right| < 1$.
   $\sum \frac{F_n}{2^n}$ est donc une combinaison linéaire de deux séries géométriques qui convergent, on en déduit que $\boxed{\sum \frac{F_n}{2^n} \text{ une série convergente}}$.

3. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$.

   On sait calculer les sommes des séries géométriques. Après calculs, il vient : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2}$.

Exercice n° 5

1. On échelonne la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Le rang de la famille est celui de la matrice : 3. $\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{B} \text{ est bien une base de } \mathbb{R}^3.}$

2. On a $s(u) = -u$, $s(v) = -v$ et $s(w) = w$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. P, la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$, écrits dans la base canonique, soit $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. Pour donner la matrice de s relativement à la base canonique, on écrit le diagramme :

$$\mathbb{R}^3_{can} \xrightarrow[P^{-1}]{\text{Id}} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)]{\text{s}} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \xrightarrow[P]{\text{Id}} \mathbb{R}^3_{can}$$

   On en déduit que la matrice cherchée vaut $A = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)P^{-1}$.

   Pour trouver l'inverse de P, on échelonne et on réduit la matrice P augmentée d'une colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ -1 & 2 & 0 & z \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -2 & y-x \\ 0 & 3 & 1 & z+x \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{array} \right)$$

   On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et, après calculs, $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

   Donner la matrice de p relativement à $\mathcal{B}$ puis relativement à la base canonique, on note A cette dernière matrice.

5. Comme s est une symétrie, $s \circ s = \mathrm{Id}$ et donc $A^2 = I_3$. $\boxed{\text{Il suit que } A^{2020} = (A^2)^{1010} = I_3}$.

Exercice n° 6

1. Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs, soit N la plus grande. On a ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ k > N \Longrightarrow \mathbb{P}(Y = k) = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{N} x^k \mathbb{P}(Y = k)$ est une somme qui n' comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, elle est donc bien définie.

   $\boxed{\text{Finalement, } g_Y \text{ est définie et c'est une fonction polynômiale de degré inférieur à } N}$.

2. Puisque g_Y est une fonction plynômiale, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on peut calculer ses dérivées successives.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_Y(x) = \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{N} kx^{k-1}k\mathbb{P}(Y=k)$ et donc $\boxed{g'_Y(1) = E(Y)}$.

On sait que $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$. Dérivons à nouveau g_Y :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g''_Y(x) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)x^{k-2}\mathbb{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=2}^{N} k^2x^{k-2}\mathbb{P}(Y=k) - \sum_{k=2}^{N} kx^{k-2}\mathbb{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=0}^{N} k^2x^{k-2}\mathbb{P}(Y=k) - \sum_{k=0}^{N} kx^{k-2}\mathbb{P}(Y=k).\end{aligned}$$

On en déduit que $g''_Y(1) = E(Y^2) - E(Y)$ puis que $\boxed{V(Y) = g''_Y(1) + g'_Y(1) - (g'_Y(1))^2}$.

3. Considérons à présent que Y suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
   a) On a, $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_Y(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^kp^k(1-p)^{n-k}\boxed{= (xp+1-p)^n}$$

   b) On applique les résultats vus à la question 2 :
   — $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_Y(x) = np(xp+1-p)^{n-1}$ et donc $E(Y) = g'_Y(1)$ soit $\boxed{E(Y) = np}$.
   — $\forall x \in \mathbb{R},\ g''_Y(x) = n(n-1)p^2(xp+1-p)^{n-2}$ et donc :

$$V(Y) = g'_Y(1) + g'_Y(1) - (g'_Y(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

   soit $\boxed{V(Y) = np(1-p)}$.

4. Soit Z, une autre variable aléatoire qui prend pour valeurs un nombre fini d'entiers naturels et qui est indépendante de Y.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{Y+Z}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k\mathbb{P}(Y+Z=k)$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (Y+Z=k) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} ((Y=i)\cap(Z=k-i))$ et donc $\mathbb{P}(Y+Z=k) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left((Y=i)\cap(Z=k-i)\right)$.
Or, les variables Y et Z sont indépendantes, on a donc : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}((Y+Z=k) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(Z=k-i)$.

Il suit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{Y+Z}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(Z=k-i)$. On reconnait la formule du produit de deux polynômes (ici la somme est écrite jusqu'à $+\infty$ mais il y a seulement un nombre fini de termes non nuls) et en écrivant $j = k-i$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_{Y+Z}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i\mathbb{P}(Y=i)\sum_{j=0}^{+\infty} x^j\mathbb{P}(Z=j)\boxed{= g_Y(x)g_Z(x)}$$

5. Soit $p \in]0;1[$. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.
On se sert des questions précédentes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_Y(x) = (1-p+xp)^n \quad \text{et} \quad g_Z(x) = (1-p+xp)^m$$

Il suit que $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{Y+Z}(x) = g_Y(x)g_Z(x) = (1-p+xp)^{n+m}$.
Il est évident qu'une loi de probabilité est parfaitement définie par sa fonction génératrice. On reconnait pour $X+Y$ la fonction génératrice d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$, on en déduit que c'est la loi de $X+Y$.
$\boxed{\text{Finalement } X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)}$.

Remarque : ce résultat n'est pas surprenant. La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ sert à modéliser le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Si on compte les succès dans n épreuves de Bernoulli puis dans m épreuves, on compte les succès dans $n+m$ épreuves.