Suites de fonctions

Interversion limite et dérivation pour une suite de fonctions

Proposition 1.

Soient I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées converge uniformément sur I vers $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

démonstration :
Dans le cas où I est un segment de $\mathbb{R}$, pour $x, a \in I$, on a :
$f(x) - f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) - f_n(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\ \mathrm{d}t.$

On applique le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n') : elle converge uniformément vers h sur le segment, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x h(t)\ \mathrm{d}t.$

Mais alors $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x h(t)\ \mathrm{d}t$, donc f est la primitive de h qui vaut $f(a)$ en a, donc est $\mathcal{C}^1$ et est telle que $f' = h$.

Dans le cas I intervalle quelconque, on procède comme précédeement sur tout segment J de I, et on obtient la classe $\mathcal{C}^1$ et la formule de dérivation sur tout segment J de I, donc sur I.

Remarque 1. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I, le résultat reste vrai.

Proposition 2.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, telle que les suites $(f_n^{(i)})$ CVS sur I vers $h_i \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, et telle que la suite $(f_n^{(k)})$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $h_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f^{(i)} = h_i$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. $\square$

Séries de fonctions

Dérivation terme à terme

Proposition 3.

Soient I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, et telle que la série $\sum u_n'$ de ses dérivées converge uniformément sur I vers $T \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$.

démonstration : on applique aux sommes partielles (S_N) le résultat sur les suites de fonctions. □

Proposition 4.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ et que les séries $\sum u_n^{(i)}$ CVS sur I vers $S_i \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$, et telle que la série $\sum u_n^{(k)}$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $S_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S^{(i)} = S_i$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. □