Préparation en Mathématiques pour la rentrée 2023

Pour toute question, vous pouvez me la poser par mail à d.zarouf@cpge-brizeux.fr

1 Révisions

Nous débuterons l'année par un chapitre d'algèbre linéaire puis très vite nous enchaînerons par des compléments sur les séries numériques. Aussi,nous utiliserons sans arrêt à travers nos chapitres de PSI, les complexes, les polynômes, les fonctions usuelles , la trigonométie : C'est pourquoi, je vous demande de revoir sérieusement les chapitres suivants :

1. Les complexes dont il faut impérativement connaître :
   (a) Forme algébrique, forme trigonométrique, module, conjugué, la relation entre module et conjugué.
   (b) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie : définition de e^{it}. Formule d'Euler, Technique de l'angle moitié, factorisation de $1 \pm e^{it}$, $e^{ip} \pm e^{iq}$, Formule de Moivre.
   (c) Racines n-ièmes.
   (d) Exponentielle complexe.
   (e) Interprétation géométrique des complexes.
2. Les fonctions usuelles : définitions et leurs études.
3. Les polynômes dont il faut impérativement connaître :
   (a) Tout le vocabulaire propre aux polynômes : coefficients, décomposition canonique, degré, coefficient dominant, espaces $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) Divisibilité et Théorème de la division euclidienne.
   (c) Fonctions polynômiales et racines : définition d'une racine , ordre de multiplicité, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, polynôme scindé, relation entre coefficients et racines (somme et produit des racines).
   (d) Polynômes irréductibles.
4. L'algèbre linéaire :
   (a) Calcul matriciel : savoir faire les différentes opérations sur les matrices, montrer qu'une matrice est inversible, déterminer l'inverse.
   (b) Espaces vectoriels :connaître les espaces vectoriels de référence, montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel, le mettre sous forme de $\text{vect}((x_i)_{i\in I})$.
   (c) Espaces de dimension finie : notion de bases et de dimension finie, connaître les différentes méthodes pour obtenir une base, sous espaces supplémentaires, base adaptée à un sev, à une décomposition en somme directe de deux sev.
   (d) Applications linéaires :
      i. méthode pour montrer qu'une application est linéaire, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.
      ii. Image directe, image réciproque, image, noyau.
      iii. $\dim \mathscr{L}(E, F)$.
      iv. Projecteur et symétrie.
      v. Théorème du rang.
      vi. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.
   (e) Matrices et applications linéaires :
      i. Savoir construire la matrice d'une application linéaire et savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, déduction du noyau, rang, de l'image.
      ii. Changement de bases : effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, matrices semblables.
   (f) Déterminants :
      i. définition, cas particulier en dimension 2 et 3.
      ii. Caractérisation d'une base.

iii. Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée : déterminant d'un produit de matrices, du produit λA où $\lambda \in \mathbb{K}$, de la transposée, caractérisation d'une matrice inversible.
iv. Calcul d'un déterminant par développement par rapport à une colonne ou une ligne, bien maîtriser la linéarité par rapport à chaque variable.

Il y aura une interrogation écrite le Jeudi 7 Septembre 2023 d'une heure sur ces notions.
Si cela peut vous aider , vous pouvez trouver sur https ://ankiweb.net/shared/info/1491273683 des cartes anki sur ces chapitres pour vous permettre de les réviser régulièrement. Pour les cours de Spé, vous pourrez voir le site de Bruno Winckler qui est très bien fait : http ://mathem-all.fr/bw/loritz.html

2 Différents formulaires pour simplifier les calculs

Le formulaire joint donne toutes les formules à connaître absolument : dérivées, primitives, développements limités, formules trigonométriques.... A Lire, relire, apprendre, ré-apprendre jusqu'à ce que ces formules soient acquises comme les tables d'addition et de multiplication que vous connaissez depuis la primaire. Associez ce formulaire au cahier de calculs que vous avez eu en début de Sup.
Lors de l' interrogation écrite du 7 Septembre 2023 , vous aurez à restituer certains points concernant les 6 premiers paragraphes de ce poly.

3 Devoir Libre Obligatoire n°1 à rendre le Jeudi 7 Septembre 2023

Une fois vos cours précédents revus, vous pourrez traiter le devoir suivant. A vous d'aller chercher dans vos cours, TD, Devoirs déjà faits les méthodes et idées pour avancer dans la résolution de ces exercices.
Vous faites ce que vous pouvez ! mais faites ! ! ! ! Il est inacceptable de ne rien faire ou presque. Il me faut minimum une copie double remplie. Il faut toujours au moins passer 10h sur ces sujets et pour un devoir libre, on y passe deux heures puis on y revient le lendemain avec de nouvelles idées car cela a cogité la nuit pendant le sommeil ! ou on se rappelle de quelque chose qu'on va vérifier dans son cours ou TD.... Ce sont des méthodes de travail à adopter. Il ne faut pas attendre que cela tombe tout cuit dans le bec !

Vous avez le choix entre deux sujets :
- Niveau I pour les 3/2 et 5/2 non admissibles à Mines-Télécom
- Niveau II pour les 3/2 dont les noms étaient indiqués sur les programmes de colle $\star$ de PCSI et pour les 5/2 admissibles à Mines-Télécom.

Sujet Niveau I

Exercice I

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation suivante :

$$(1)\ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+i\,a}{1-i\,a}$$

1. Justifier que le complexe $\dfrac{1+i\,a}{1-i\,a}$ est bien défini.
2. (a) Montrer que, si z est une solution de (1), alors $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$ $(\star)$.
   (b) Dans le plan complexe, on note par M le point d'affixe z, A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$.
      i. Donner l'interprétation géométrique de $(\star)$.
      ii. En déduire que les solutions de (1) sont réelles.
3. **Dans cette question, a = tan θ où** $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
   (a) Donner le module et un argument de $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue u : $u^n = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.
   (c) i. En déduire les solutions de (1).
      ii. Retrouver que ces solutions sont réelles.

Exercice II

Notations
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On désigne par $T_{s,n}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
- On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$.
- On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = -A$.
- On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} T_{s,n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ A & \longmapsto & A - {}^tA \end{array}$$

Si cela vous semble trop compliqué avec n quelconque, prendre $n = 3$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $T_{s,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont on donnera une base et la dimension.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. Montrer que φ est une application linéaire surjective.
5. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_n$ et celle de l'espace des matrices symétriques.
6. Proposer une autre méthode pour trouver ces dimensions.

Exercice III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à n . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout polynôme P , on admet que $\displaystyle\int_y^x P(t)e^t dt$ a une limite finie quand y tend vers $-\infty$. (*Les 5/2 peuvent le montrer !*). On note cette limite par $\displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.

1. Démontrer que, pour tout $i \in [0..n]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^x t^i e^t dt = e^x(x^i + Q(x))$ où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(i-1)$.
2. On définit l'application φ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt.$
   Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Dans cette question uniquement, on prend $n = 3$. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner son déterminant. Que peut-on en déduire ?
4. *Question plus difficile* On revient à n quelconque. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner son application réciproque et la matrice de celle-ci dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice IV : Des calculs

Les questions sont indépendantes

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
2. Calculer $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)\, dt$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(t) dt$.
4. Calculer $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^1 t^n (\ln(t))^p dt$.
5. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

FIN

Sujet Niveau II

Dans les notations, la phrase mise entre parenthèses n'est compréhensible que pour les 5/2. De même, les questions mises entre parenthèses ne sont à traiter que par les 5/2.
Si vous ne pouvez pas traiter la moitié du sujet, mieux vaut vous rabattre sur le sujet Niveau I, cela vous apportera davantage.

Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et on appelle noyau de M, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\mathrm{rg}(M)$ son rang, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace(χ_M son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.) On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant. Pour rappel, La trace de M notée tr(M) est la somme de ses coefficients diagonaux

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f. On définit la suite des puissances de f en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, & \\ \forall k \in \mathbb{N}, & f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

(Si $\Pi = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.)

Lorsque $M_1, \ldots, M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_k$, on note $\mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + \ldots + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(\Phi(M)) = \mathrm{rg}(M)$;
- conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\Phi(M)) = \det(M)$;
- conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(\Phi(M)) = \mathrm{tr}(M)$;
- conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

I Résultats préliminaires

I.A – On suppose que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Q 1. *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\,\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

Q 2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\,\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)\,Q.$$

I.B – On suppose que M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(Q 3.) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel k, $M^k X = \lambda^k X$.

Q 4. En déduire que, si $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre complexe de M est une racine dans $\mathbb{C}$ de Π.

II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Γ_A l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Q 5. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Γ_A appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Q 6. Démontrer que, si A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors Γ_A conserve le rang.

Q 7. Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie II.A, A est un élément fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 8. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$.

Q 9. En déduire que, pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$, $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi(\Gamma_A)$.

Q 10. À l'aide du résultat précédent, démontrer que A est diagonalisable si et seulement si Γ_A est diagonalisable.

Q 11. Démontrer que χ_A est un polynôme annulateur de Γ_A et que χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de A.

Q 12. En déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^\top Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{\Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right)^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{\Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right)^2\right\}.$$

Q 13. Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall(\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

II.B.1) Soient P et Q deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q 14. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.

Q 15. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

Q 16. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

(Q 17) Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

II.B.2) Dans cette section, on prend $n \geqslant 2$.

Q 18. Montrer que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$.

Q 19. En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

III Endomorphismes de rang donné

On suppose que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

III.A – On suppose dans cette sous-partie que f est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

Q 20. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.B – On suppose dans cette sous-partie que f n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 21. Montrer que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_k)\big)$ est libre.

Q 22. Justifier que $k < n$.

On complète la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_k)\big)$ en une base $\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_k), f_{k+1}, \dots, f_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 23. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.C – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_{n,r} = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.
Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.A –

Q 26. Expliciter la matrice de la transposition $\mathcal{T}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sera notée T.

(Q 27). Justifier sans calcul que T est diagonalisable

(Q 28) Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{T}$.

On se donne deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Q 29. Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix},$$

où U est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

On suppose dans la suite de cette partie que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang.

IV.B –

Q 30. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 31. Déterminer les rangs de $\Phi(B_1)$, $\Phi(B_4)$, $\Phi(B_1+B_4)$. En déduire l'existence de deux matrices P_1 et Q_1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi(B_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi(B_4)=\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\beta\end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels tels que $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Phi'=\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi$, $M'=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}}(\Phi')$.

Pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$, $B'_j=\Phi'(B_j)$ et $C_j=(a_j,b_j,c_j,d_j)^\top$ désigne la j-ième colonne de la matrice M'.

Q 32. Déterminer C_1 et C_4.

Q 33. Démontrer que $\forall i\in\{1,2,3,4\}$, $a_id_i-b_ic_i=0$.

Q 34. En considérant le rang des matrices $B'_1+B'_2$ et $B'_1+B'_3$, démontrer que $d_2=d_3=0$.

On déduit des deux questions précédentes que $b_2c_2=b_3c_3=0$.

IV.C – On suppose dans cette sous-partie que $c_2=0$.

Q 35. En étudiant $\det(M')$, démontrer que les nombres b_2, c_3, d_4 sont tous trois non nuls.

Q 36. En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices $B'_3+B'_4$, $B'_2+B'_4$ et $B'_1+B'_2+B'_3+B'_4$, démontrer que

$$M'=\begin{pmatrix}1&a_2&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&c_3&c_4\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}$$

avec $c_4=a_2c_3$ et $d_4=b_2c_3$.

Q 37. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_1$.

IV.D – On suppose à présent que $c_2\neq0$.

Q 38. Démontrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi'\circ\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{pmatrix}1&a_3&a_2&0\\0&b_3&0&0\\0&c_3&c_2&c_4\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}.$$

Q 39. Démontrer que $c_3=0$.

Q 40. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n=2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$.

On admet que ce résultat est encore valable lorsque n est un entier strictement supérieur à 2.

V Endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le déterminant ou le polynôme caractéristique

V.A – On suppose dans cette sous-partie que $n=2$ et que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le déterminant.

On considère une matrice A non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(A)=0_2$.

Q 41. Montrer que A est de rang 1.

La partie III assure l'existence de deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$A=PJ_{2,1}Q.$$

On pose alors $N=P(I_2-J_{2,1})Q$.

Q 42. En calculant de deux manières différentes $\det(A+N)$, aboutir à une absurdité et conclure que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 43. En discutant selon les valeurs possibles du rang, démontrer que Φ conserve le rang.

On a ainsi démontré que tout endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang. On admet que ce résultat s'étend au cas où n est un entier naturel non nul quelconque.

Q 44. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant.

V.B – On revient au cas général où n est un entier naturel non nul.

V.B.1) Propriétés de la trace

Q 45. Démontrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(M)\end{array}\right.$$

est une forme linéaire vérifiant

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Q 46. Montrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \operatorname{tr}(A^\top B)\end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 47. En déduire que, si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \operatorname{tr}(AM) = 0,$$

alors $A = 0$.

(**V.B.2) Application à la caractérisation des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le polynôme caractéristique**

Q 48. Démontrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique conserve également le déterminant et la trace.

Q 49. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique. **)**

• • • FIN • • •