Calcul Différentiel

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Dérivées partielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$: $a = (a_1, \cdots, a_n)$. U étant ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que : $\mathcal{B}(a, r) \subset U$.
$\mathbb{R}^n$ étant de dimension finie, le choix de la norme est sans importance. On peut en particulier considérer la norme infini, définie par : $||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$.
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On considère la i-ième application partielle en a, définie par : $f_i(t) = f(a_1, \cdots, t, \cdots, a_n)$. Cette application est en particulier définie dès que : $|t - a_i| < r$, donc sur l'intervalle $]a_i - r, a_i + r[$. On peut donc étudier sa dérivabilité éventuelle en a_i.

Définition

La fonction f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la i-ième variable** en a lorsque l'application partielle f_i est dérivable en a_i.

Si elle existe, cette dérivée partielle est souvent notée : $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
On a ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_i + h, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{h}.$$

Si $n = 2$, on peut donc éventuellement définir en un point a les deux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$. En notant $a = (x, y)$, on a (sous réserve d'existence) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Remarque : L'existence d'une dérivée partielle en un point entraîne la continuité en ce point de l'application partielle correspondante, mais pas celle de f.

Une dérivée partielle étant la dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle vérifie les règles de calcul déjà connues.
En particulier, l'ensemble des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable en $a \in U$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et la dérivation partielle est une application linéaire. Soit f et g de telles fonctions. Alors, pour tout couple de réels (λ, μ),

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

Le produit fg admet une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable et :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = f(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ g(a).$$

Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{g}$ admet une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable en a :

$$\frac{\partial(\frac{1}{g})}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{(g(a))^2}.$$

Remarque sur la notation : La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ présente une ambiguïté. Il faut bien comprendre que x est une variable muette dans l'écriture $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qui signifie qu'on dérive par rapport à la première variable, alors que c'est une variable significative dans le couple (x,y) qui indique la valeur pour laquelle on calcule cette dérivée. On peut aussi bien convenir d'écrire $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ les dérivées partielles et les calculer en (x,y) : $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,y)$.
La notation $\partial_i f(x,y)$ est donc préférable ... mais moins utilisée.

Remarque sur les notations utilisées en physique : En physiqe, on travaille sur des grandeurs, qui peuvent être exprimées en fonction de différents jeux de variables. Par exemple, en thermodynamique, l'entropie S s'exprime comme fonction de deux variables parmi T,P,V (température, pression, volume). On utilise donc les notations $\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ et $\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ pour indiquer la variable par rapport à laquelle on dérive (ici, T) et celle qui est fixée (respectivement V et P). Implicitement, il y a en fait deux fonctions f et g différentes, définies par : $S = f(T,V)$ et $S = g(T,P)$.

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Si f admet des dérivées partielles en tout point de U, on peut définir les applications dérivées partielles : $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, qui sont aussi des applications de U dans $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur U si, en tout point de U, toutes les dérivées partielles d'ordre 1 existent et si, de plus, chacune des applications dérivées partielles $\partial_i f$ est continue sur U.
On définit alors le **gradient** de f en a, qui est le vecteur

$$\overrightarrow{\nabla} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Opérations sur le gradient : Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors :

$\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f(a) + \mu \overrightarrow{\nabla} g(a)$, $\overrightarrow{\nabla}(fg)(a) = f(a)\overrightarrow{\nabla} g(a) + g(a)\overrightarrow{\nabla} f(a)$,
si $g(a) \neq 0$: $\overrightarrow{\nabla}\left(\dfrac{1}{g}\right)(a) = -\dfrac{1}{(g(a))^2}\overrightarrow{\nabla} g(a)$.

On admet le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> : Développement limité d'ordre 1

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. f admet alors, en tout point a de U, un développement limité d'ordre 1, i.e pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n)$ tel que $a + h \in U$, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + ||h||\, \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

.