Dérivation d'une fonction vectorielle

Exercice 1 : Soit (C) la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = & t^2-1 \\ y(t) = & 2t^3+3t^2-1 \end{cases}$

Etudier les fonctions x et y.

Etudier la limite quand t tend vers $\pm\infty$ de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$. Interpréter graphiquement.

Etudier la limite quand t tend vers 0 de $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$. Interpréter graphiquement. Tracer (C).

Exercice 2 : Soit (C) la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = & 2\cos^3 t \\ y(t) = & 2\sin^3 t \end{cases}$

Réduire l'intervalle d'étude et préciser les symétries de la courbe.

Etudier et tracer la courbe en précisant les tangentes aux points de paramètre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Calculer la longueur de la courbe.

Exercice 3 : Soit (C) la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = & \dfrac{\ln|t|}{t} \\ y(t) = & \dfrac{1+\ln|t|}{t^2} \end{cases}$.

Justifier qu'il suffit de faire l'étude sur $]0,+\infty[$.

Etudier x et y. Etudier la limite quand t tend vers $\pm\infty$ de $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Interpréter graphiquement puis tracer la courbe (C).

Exercice 4 : Soit (C) la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = & \dfrac{1}{t^2-t} \\ y(t) = & \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

Etudier les fonctions x et y. Ecrire une équation de la tangente à (C) au point de paramètre 2. Montrer que $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ admet une limite l quand t tend vers 1 . Déterminer le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 1 de $y(t)-lx(t)$. Interpréter graphiquement. Tracer (C).

Exercice 5 : Soit (C) la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = & \dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t} \\ y(t) = & \cos t \end{cases}$.

Justifier qu'il suffit de faire l'étude sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Etudier puis tracer la courbe (C).

Exercice 6 : Soit (C) la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = & \sin(2t) \\ y(t) = & \sin(3t) \end{cases}$

Réduire l'intervalle d'étude et préciser les symétries de la courbe. Etudier et tracer (C).

Exercice 7 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas et telle que, pour tout $t \in I$, la famille $(f(t), f'(t))$ est liée. On pose alors : $\forall t \in I, g(t) = \dfrac{1}{\|f(t)\|} f(t)$. Montrer que $g'(t)$ est à la fois colinéaire et orthogonal à $g(t)$. En déduire que $f(t)$ a une direction constante.

Exercice 8 : Soit C la courbe d'équation cartésienne : $y = \operatorname{ch} x - 1$. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{OA}$ où A est le point d'abscisse 1.