Dérivation d'une fonction vectorielle

On considère dans ce chapitre des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1 Dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

Définition

Soit $\vec{f}$ de I dans $\mathbb{R}^n$ et a un élément de I.
On dit que $\vec{f}$ est **dérivable** en a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{\vec{f}(x)-\vec{f}(a)}{x-a}$ admet une limite dans $\mathbb{R}^n$ quand x tend vers a. Cette limite est alors le **vecteur dérivé** de $\vec{f}$ en a, noté $\vec{f}'(a)$:

$$\vec{f}'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(a)}{x-a}$$

Rq : $\vec{f}(x)-\vec{f}(a)$ est un vecteur mais $x-a$ est un réel, ce qui permet la division.

Cas $n=1$ **:** f est à valeurs réelles et on retrouve ainsi la définition du nombre dérivé.

On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.

Propriété 1 : Développement limité d'ordre 1

$\vec{f}$ est dérivable en a si et seulement s'il existe un vecteur $\vec{l}\in\mathbb{R}^n$ et une fonction vectorielle $\vec{\varphi}$ de I dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall x\in I, \vec{f}(x)=\vec{f}(a)+(x-a)\vec{l}+(x-a)\vec{\varphi}(x) \text{ avec : } \lim_{x\to a}\vec{\varphi}(x)=\vec{0}.$$

On a alors : $\vec{l}=\vec{f}'(a)$.
Une telle expression s'appelle le **développement limité d'ordre 1** de $\vec{f}$ en a.

En posant $x=a+h$, ce développement s'écrit sous la forme : $\vec{f}(a+h)=\vec{f}(a)+h\,\vec{l}+h\vec{\varepsilon}(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h)=\vec{0}$.

Cas $n=1$ **:** Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points de coordonnées $(x,f(x))$ pour x dans l'ensemble de définition de f est la courbe représentative de f. Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ est la tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse a. En notant M un point quelconque de la courbe d'abscisse x, la pente de la droite (M_0M) est égale au taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et la tangente en M_0 correspond à la position limite de cette droite lorsque le point M tend vers le point M_0.

Propriété 2 : Dérivabilité et continuité

Si $\vec{f}$ est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Propriété 3 : Utilisation des applications coordonnées

> Soient $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$. f est dérivable en a si et seulement si chacune des applications coordonnées l'est et dans ce cas : $f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)e_i$.

Rq : On peut en particulier utiliser les applications coordonnées de f dans la base canonique.

Plus généralement, on peut considérer une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. La définition de la dérivabilité est identique et, dès lors que l'on a fixé une base dans cet espace, on se ramène à travailler sur les coordonnées des vecteurs dans cette base.

Remarque sur les notations : En mathématiques, lorsqu'une fonction est dérivable en un point t_0 de I, on note en général son nombre ou son vecteur dérivé en t_0 sous la forme : $f'(t_0)$ (notation de Lagrange).
En physique, on ne nomme pas les fonctions utilisées mais plutôt les grandeurs physiques (longueur l, durée t, pression P ...). Ainsi, si z représente la cote d'un point matériel en mouvement, z peut par exemple être considérée comme une fonction de l'abscisse x du point ou comme une fonction du temps t. Le physicien notera $z(x)$ ou $z(t)$ pour distinguer ces deux fonctions alors que le mathématicien définira deux fonctions f et g l'une fonction de x et l'autre fonction de t. Le physicien utilisera alors pour la dérivée la notation de Leibniz : $\frac{dz}{dx}(x_0)$ voire $\frac{dz}{dx}(x = x_0)$ ou $\frac{dz}{dt}(t_0)$ voire $\frac{dz}{dt}(t = t_0)$.

Dans le cas particulier où la variable t représente le temps, on utilise aussi souvent la notation de Newton : $\dot{x}(t_0)$.

Dérivées successives : On définit la dérivée seconde de f lorsqu'elle existe en posant : $f'' = (f')'$, puis les dérivées successives par récurrence en posant : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

On dit que f est :

- de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa fonction dérivée est continue sur I
- de classe $\mathcal{C}^k$ sur I lorsqu'elle est k fois dérivable sur I et que sa fonction dérivée d'ordre k est continue sur I
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est dérivable à tout ordre sur I (toutes ses dérivées successives sont alors continues sur I).

Rq : f est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si chacune de ses applications coordonnées dans une base fixée l'est.

2 Opérations sur les dérivées

Propriété 4 : Linéarité de la dérivation

> L'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev, et la dérivation est une application linéaire : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Conséquence : Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, toute combinaison linéaire de f et g est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I : $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Propriété 5 : Dérivée de $L \circ f$ avec L linéaire

> Soit f une application dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors $L \circ f$ est dérivable sur I et : $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Propriété 6 : Dérivée de $B(f, g)$ avec B bilinéaire

> Soient f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, g dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Alors $B(f, g)$ est dérivable sur I et :
>
> $$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Exemples :

- Si f est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et φ dérivable sur I à valeurs réelles, alors le produit φf est dérivable et : $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.
- Si f et g sont dérivables sur I, leur produit scalaire est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et : $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

  Si de plus f ne s'annule pas, alors l'application $||f||$ est dérivable : $||f||' = \dfrac{(f|f')}{||f||}$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, leur déterminant dans une base $\mathcal{B}$ fixée de $\mathbb{R}^2$ est dérivable sur I et : $(\det{}_{\mathcal{B}}(f, g))' = \det{}_{\mathcal{B}}(f', g) + \det{}_{\mathcal{B}}(f, g')$.

Propriété 7 : Dérivée de $f \circ \varphi$ avec φ fonction réelle

> Soit φ une application dérivable sur un intervalle J à valeurs dans I et f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f' \circ \varphi$.

3 Rappels des propriétés des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

f désigne ici une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Petites variations : Si f est dérivable en x, son développement limité d'ordre 1 en x s'écrit sous la forme : $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
Au voisinage de x, on peut donc écrire : $f(x + h) - f(x) \approx hf'(x)$.
Avec la notation de Leibniz, on écrit en physique la formule des petites variations pour une fonction y dépendant d'une variable x qui subit une petite variation dx :

$$dy = y(x + dx) - y(x) \approx y'(x)dx.$$

Propriété 8 : Extremum local

> Si f est dérivable sur un intervalle I et admet un extremum local en un point a intérieur à I, alors : $f'(a) = 0$.

Théorème 9 : Théorème de Rolle

> On suppose f continue sur $[a, b]$ $(a < b)$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors la dérivée de f s'annule au moins une fois sur $]a, b[$: $\exists\, c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Théorème 10 : Théorème des accroissements finis

On suppose f continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors : $\exists\, c \in]a,b[, \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Propriété 11 : Inégalité des accroissements finis

On suppose f dérivable sur I, et de dérivée bornée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$.
Alors les taux d'accroissement sont aussi bornés par M :
$\forall (a,b) \in I^2, a \neq b \Rightarrow \left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant M$, ou encore :
$\forall (a,b) \in I^2, |f(b)-f(a)| \leqslant M\,|b-a|$.

Conséquence : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors f est lipschitzienne.
Ceci peut, par exemple, permettre de prouver la convergence d'une suite vérifiant la relation de récurrence : $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque l'application est contractante, i.e. lipschitzienne avec un rapport strictement inférieur à 1.

Propriété 12 : Dérivée et sens de variation

Soit f à valeurs réelles dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur I (resp. décroissante, resp. constante) si et seulement si sa dérivée est positive sur I (resp. négative, resp. nulle).
2. f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante) si et seulement si sa dérivée est positive sur I (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle de I contenant deux points.

Propriété 13 : Condition suffisante de dérivabilité

Soit f continue sur $[a,b](a<b)$ à valeurs réelles, dérivable au moins sur $]a,b[$.
Si la dérivée f' admet une limite l en b, alors le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ tend vers l quand x tend vers b.
En particulier, si f' admet une limite finie l, alors f est dérivable (à gauche) en b et : $f'(b) = \lim\limits_{x\to b} f'(x)$.

Rq 1 : Si $l = \pm\infty$, la courbe représentant f admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

Rq 2 : On peut énoncer un résultat similaire pour la borne a.

Corollaire : Extension du caractère $\mathcal{C}^1$

Soit f continue sur $[a,b](a<b)$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
Si la dérivée f' admet une limite finie l en b, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$.

4 Arc paramétré

On définit un **arc paramétré** $(\vec{f}, I)$ par la donnée d'une fonction $\vec{f}$ définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On parle d'arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Lorsque $n \in \{2,3\}$, on associe à cet arc une courbe tracée dans le plan ou dans l'espace géométrique.
Si $n=2$, on munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $M(t)$ le point du plan de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$ (point de paramètre t). La **courbe paramétrée** associée à

l'arc est : $C = \{M \in \mathcal{P} / \exists\, t \in I, M = M(t)\}$.
Si $n = 3$, on munit l'espace E d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $M(t)$ le point du plan de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La **courbe paramétrée** associée à l'arc est : $C = \{M \in \mathcal{E} / \exists\, t \in I, M = M(t)\}$.

Interprétation cinématique : Si le paramètre t représente le temps, $\overrightarrow{f(t)}$ donne la position de $M(t)$ à l'instant t (vecteur position) : $\overrightarrow{f(t)} = \overrightarrow{OM}(t)$.
C est la trajectoire du point $M(t)$ et $\vec{f}$ est le mouvement du point.
Si $\vec{f}$ est dérivable, $\overrightarrow{f'(t)}$ est le vecteur vitesse et $\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|$ (norme euclidienne) est la vitesse instantanée du point à l'instant t.
Si $\vec{f}\,'$ est dérivable, $\overrightarrow{f''(t)}$ est le vecteur accélération.

Rq : Une même courbe C admet plusieurs paramétrages, correspondant à différents parcours sur la courbe.

Définition

On suppose $\vec{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La **longueur** de l'arc compris entre deux points de paramètre t_0 et t_1 est égale à : $L = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} ||\overrightarrow{f'(t)}||_2 \, dt$.

Interprétation cinématique : La longueur de l'arc est la distance parcourue entre les deux instants t_0 et t_1 : c'est l'intégrale de la vitesse entre t_0 et t_1.

Si $n = 2$: $L = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$. Si $n = 3$: $L = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$.

La tangente à une courbe C en un point M_0 est définie comme étant la limite (si elle existe) des droites (M_0M) lorsque le point M de la courbe se rapproche du point M_0.
Dans le plan, notons (x_0, y_0) les coordonnées du point M_0 et (x, y) celles de M. Le coefficient directeur de la droite (M_0M) est alors égal à $\dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Dans le cas d'une courbe paramétrée, si t_0 est le paramètre du point M_0, on étudie donc : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)}$.

Si x et y sont dérivables en t_0 et $x'(t_0) \neq 0$, cette limite est égale à $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ qui donne la pente de la tangente. En particulier, si $y'(t_0) = 0$, la tangente est horizontale.
La tangente en M_0 est alors dirigée par le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$.
On peut énoncer les résultats suivants lorsque $n \in \{2, 3\}$.

Définition

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Le point $M(t_0)$ est **régulier** lorsque : $\overrightarrow{f'(t_0)} \neq \overrightarrow{0}$.
On dit que (C) est un arc régulier lorsque tous ses points sont réguliers.

Propriété 14 : Tangente en un point régulier

On suppose $\vec{f}$ dérivable en $t_0 \in I$ telle que : $\overrightarrow{f'(t_0)} \neq \overrightarrow{0}$. C admet alors une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$.

Rq : L'utilisation de développements limités peut permettre de préciser la position locale de la courbe par rapport à sa tangente en un point régulier, ou de déterminer une éventuelle tangente en un point non régulier (point stationnaire).

Plan d'étude d'une courbe paramétrée plane

- Domaine de définition et domaine d'étude

  Pour étudier un arc paramétré, on commence par déterminer l'ensemble de définition de f et rechercher des symétries éventuelles à l'aide des propriétés de f. Si, par exemple, x est paire et y impaire, la courbe C est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$. Un dessin permet d'interpréter géométriquement les propriétés observées.

- Variations

  On étudie ensuite les variations des deux fonctions coordonnées, que l'on présente dans un même tableau pour mieux visualiser le déplacement du point.

- Etudes locales

  On précise les tangentes particulières (horizontales ou verticales) et éventuellement on étudie les tangentes en des points stationnaires (i.e. non réguliers).

- Etude des branches infinies

  Si l'une (au moins) des coordonnées tend vers l'infini pour une valeur t_0 de la variable, on dit que la courbe présente une branche infinie. Elle admet éventuellement une asymptote.
  Si : $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, la courbe C admet une asymptote verticale d'équation : $x = x_0$.
  Inversement, si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation : $y = y_0$.

  Par définition, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers t_0 si : $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - (ax(t) + b)) = 0$.
  On peut utiliser des développements asymptotiques pour déterminer une asymptote éventuelle et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote, en écrivant $y(t)$ sous la forme : $y(t) = ax(t) + b + \varphi(t)$ où $\varphi(t)$ tend vers 0 en t_0.
  On peut également étudier $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Si cette limite a existe et est réelle, elle donne la pente de l'asymptote éventuelle et on cherche alors si la différence $y(t) - ax(t)$ admet une limite finie.
  Rq : ce sont les mêmes méthodes que l'on utilise lorsqu'on étudie une courbe définie par une équation cartésienne du type : $y = f(x)$. Une telle courbe peut d'ailleurs être paramétrée de manière naturelle en posant $x = t$ et $y = f(t)$.

- Tracé : il faut être vigilant sur l'ordre dans lequel on lit le tableau de variations.